ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Б1.Б.05 Математика

Специальность: 38.05.01 Экономическая безопасность
Специализация: Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности
Форма обучения: очная

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1 Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/ эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятель-ное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	**Тема 1** Элементы линейной алгебры				0,5	3
2	**Тема 2** Элементы векторной алгебры				0,5	3
3	**Тема 3** Элементы аналитической геометрии на плоскости				0,5	3
4	**Тема 4** Элементы аналитической геометрии в пространстве				0,5	3
5	**Тема 5** Числовая последовательность, ее предел				0,5	3
6	**Тема 6** Функция, ее предел				0,5	3
7	**Тема 7** Дифференциальное исчисление, его приложения				0,5	3
8	**Тема 8** Функция двух переменных				0,5	2
9	**Тема 9** Первообразная и неопределенный интеграл				3	4
10	**Тема 10** Определенный интеграл				3	4
11	**Тема 11** Несобственный интеграл				4	2
12	**Тема 12** Дифференциальные уравнения				4	4
13	**Тема 13** Дифференциальные уравнения второго порядка				6	6
14	**Тема 14** Числовые ряды				4	4
15	**Тема 15** Степенные ряды				6	6
16	**Тема 16** Теория вероятностей				5	4
17	**Тема 17** Математическая статистика				8	4
	Итого:				**47**	**61**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1. Определители. Матрицы. Собственные значения и собственные векторы матрицы Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Способы вычисления определителей: по определению, по теореме Лапласа, методом эффективного понижения порядка.
2. Использование свойств определителей для упрощения их вычисления.
3. Действия над матрицами, их свойства.
4. Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.
5. Применение матриц в модели экономической торговли, модели Леонтьева многоотраслевой экономики.
6. Решение систем линейных уравнений: матричный метод решения, по формулам Крамера, методом Гаусса.
7. Исследование решения систем.
8. Особенности решения однородных систем линейных уравнений.

2.2 Векторы. Линейное пространство. Евклидово пространство

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Действия над векторами можно проводить в геометрической и координатной форме.
2. Признаки коллинеарности и компланарности векторов.
3. Скалярное произведение векторов, его приложения.
4. Проекция вектора на ось, ее свойства.
5. Векторное пространство векторов. Базис векторного пространства.
6. Разложение вектора по базису. Переход к новому базису.
7. Собственные векторы и собственные значения матриц.
8. Линейная модель обмена.

2.3. Линии второго порядка. Кривые спроса и предложения. Паутинная модель рынка

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Уравнение прямой линии на плоскости можно задать различными способами: с угловым коэффициентом, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом, проходящей через две данные точки, в отрезках, проходящей через данную точку с нормальным вектором, проходящей через данную точку с направляющим вектором.
2. Формула нахождения угла между двумя прямыми позволяет сформулировать условие параллельности и перпендикулярности прямых.
3. Общее уравнение прямой, его частные случаи позволяют упростить построение прямой на плоскости.
5. Линии второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.
6. Рассмотреть канонические уравнения линий второго порядка, провести его исследование.
7. Кривые спроса и предложения.
8. Паутинная модель рынка.

2.4. Плоскость и прямая в пространстве.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Определение и способы задания плоскости: по трем точкам, с точкой и нормальным вектором, в отрезках.
2. Общее уравнение плоскости, его частные случаи.

3. Уравнение прямой в пространстве, способы задания прямой: каноническое уравнение, через две точки, с точкой и направляющим вектором.
4. Плоскость и прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

2.5. Числовые последовательности. Задача о непрерывном начислении процентов

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Определение и основные понятия функции одной переменной.
2. Элементарные функции, их графики.
3. Сложная функция. Обратная функция.
4. Некоторые функциональные зависимости, используемые в экономике.
5. Кривые спроса и предложения. Равновесная цена.
6. Преобразование графиков. Интерполирование функций.
7. Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности.
8. Основные свойства сходящихся последовательностей
9. Задача о непрерывном начислении процентов.

2.6. Множества. Функциональная зависимость. Преобразование графиков. Интерполирование функций. Непрерывные функции. Асимптоты графика функции.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Предел функции в точке и на бесконечности. Теоремы о пределах функций.
2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
3. Раскрытие неопределенностей.
4. Два замечательных предела.
5. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.
6. Левый и правый пределы функции.
7. Непрерывность функции в точке и на интервале.
8. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.
9. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

2.7. Производная функции. Дифференциал функции. Предельные показатели в микроэкономике. Эластичность экономических показателей

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Производная функции, ее геометрический, механический и экономический смысл.
2. Правила дифференцирования.
3. Дифференцирование сложной и обратной функций.
4. Дифференцирование показательно - степенной функции.
5. Производная неявной функции.
6. Производные высших порядков.
7. Дифференциал функции, его геометрический смысл.
8. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
9. Применение дифференциального исчисления к исследованию функции: промежутки монотонности, точки экстремума, промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
10. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
11. Полное исследование функции, построение ее графика по пунктам исследования.
12. Предельные показатели в микроэкономике. Эластичность экономических показателей.

2.8. Билинейные и квадратичные формы. Функции нескольких переменных. Максимилизация прибыли

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Нахождение и построение области определения функции двух переменных.

2. Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных находятся при фиксировании переменных, по которым не ведется дифференцирование.
3. Производная по направлению, градиент, их геометрический смысл.
4. Экстремум функции нескольких переменных.
5. Применение функции двух переменных в экономике, функция Кобба-Дугласса.
6. Максимилизация прибыли.

2.9. Интегральное исчисление. Интегрирование рациональных дробей, рекурентная формула

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла, основные свойства.
2. Знать и уметь применять таблицу основных интегралов.
3. Знать и уметь применять методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.
4. Определение рациональной функции, виды простейших рациональных дробей и их интегрирование.
5. Разложение рациональной функции на сумму простейших рациональных дробей.

2.10. Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Использование определенного интеграла в экономике

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие определенного интеграла, его основные свойства. Формула Ньютона – Лейбница.
2. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла.
3. Площадь фигур на плоскости. Нахождение объема тела вращения.
4. Методы интегрирования в определенном интеграле.

2.11. Несобственные интегралы

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие несобственного интеграла.
2. Несобственные интегралы первого рода.
3. Несобственные интегралы первого рода.

2.12. Дифференциальные уравнения первого порядка. Элементы качественного анализа дифференциальных уравнений.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие общего и частного решения. Решение задачи Коши.
2. Понятие и способ решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
3. Понятие и способ решения линейных дифференциальных уравнений, уравнений Бернулли методом Бернулли.
4. Понятие и способ решения однородных дифференциальных уравнений.
5. Понятие и способ решения разностных дифференциальных уравнений.

2.13. Дифференциальные уравнения высших порядков. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Определение и способ решения ЛОДУ второго порядка.
2. Определение комплексных чисел.
3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
5. Определение и способ решения ЛНДУ второго порядка.

2.14. Знакоположительные ряды. Знакочередующиеся ряды. Признаки сходимости рядов

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие числового знакоположительного ряда, свойства рядов.
2. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
5. Эталонные ряды.
6. Понятие знакочередующегося ряда.
7. Признак Лейбница.
8. Абсолютная и условная сходимость.

2.15. Степенные ряды. Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие степенного ряда.
2. Определение радиуса и интервала сходимости степенного ряда.
3. Определение и способ разложения функций в ряд Тейлора и Маклорена.
4. Применение рядов в приближенных вычислениях.

2.16. Основы теории вероятностей. Вероятность события при повторных испытаниях. Случайные величины. Нормальный закон распределения случайной величины

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Сущность и условия применения теории вероятностей.
2. Классическое и статистическое определения вероятности.
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Вероятность события при повторных испытаниях: формула Бернулли, локальная теорема Лапласа, интегральная теорема Лапласа, теорема Пуассона.
6. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний.
7. Понятие случайной величины.
8. Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной с.в., числовые характеристики дискретной случайной величины.
9. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и её свойства. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
10. Определение нормального закона распределения случайной величины.
11. Вероятность попадания нормально распределенной с. в. в заданный интервал.
12.Правило «трёх сигм».

2.17. Основы математической статистики. Элементы математической статистики в экономике. Основы теории выборочного метода

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие вариационных рядов, их характеристики и графическое изображение.
2. Понятие генеральной совокупности и выборки.
3. Определение и способ нахождения функции распределения.
4. Числовые характеристики вариационных рядов.
5. Основы теории выборочного метода: статистическое оценивание параметров, методы нахождения оценок.
6. Понятие точности оценки, надежности, доверительного интервала, некоторые виды доверительных интервалов.
7. Понятие статистической гипотезы и общая схема ее проверки.
8. Типы статистических критериев проверки гипотез.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практическое занятие 1 (ПЗ-1): Определители.

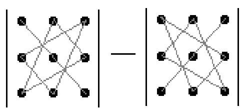
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Вычисление определителей второго и третьего порядка по определению.

Определителем второго порядка называется число, обозначаемое символом Δ (дельта) $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, и определяемое равенством $\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое символом $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$



2. Минор, алгебраическое дополнение.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, полученный из данного в результате вычеркивания i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется число

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}}$$

3. Вычисление определителей по теореме Лапласа.

ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА (о разложении определителя по элементам строки или столбца): Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ (= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}) \end{array}$$

4. Вычисление определителей методом эффективного понижения порядка.

Метод эффективного понижения порядка заключается в накапливании нулей в какой-либо строке (столбце) с помощью 6-го свойства определителей и последующем вычислении его по теореме Лапласа.

3.2 Практическое занятие 2 (ПЗ-2): Матрицы.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Действия над матрицами.

Суммой (разностью) двух матриц одинаковой размерности называется матрица той же размерности, элементы которой равны сумме (разности) элементов, стоящих на одинаковых местах.

Произведением матрицы A на действительное число $k \neq 0$ называется матрица B, каждый элемент которой получен умножением каждого элемента исходной матрицы A на это число k.

Произведением матрицы $A_{m \times k}$ и матрицы $B_{k \times n}$ называется матрица $C_{m \times n}$, элементы которой c_{ij} равны сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A и соответствующих элементов j-го столбца матрицы B.

$$A_{m\times k}\cdot B_{m\times k}=C_{m\times n} \qquad A_{m\times k}=(a_{i\,p}) \quad i=1...m \quad p=1...k$$

$$B_{k\times m}=(b_{p\,j}) \quad j=1...n$$

$$\boxed{c_{i\,j}=\sum_{p=1}^{k} a_{i\,p}\cdot b_{p\,j}} \qquad C_{m\times n}=(c_{i\,j})$$

Матрицы можно перемножать лишь в том случае, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

2. Нахождение обратной матрицы.

Обратной матрицей по отношению к данной называется матрица, которая будучи умноженной на данную матрицу как слева, так и справа дает единичную матрицу.

$$\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E}$$

ТЕОРЕМА (о существовании и единственности обратной матрицы): Для квадратной матрицы $A_{n\times n}$, определитель которой отличен от нуля ($\Delta(A)\neq 0$), существует обратная матрица A^{-1}, причем единственная.

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2}\\ ..... & ..... & ... & ....\\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn}\end{pmatrix}},$$

где $A_{i\,j}$ - алгебраические дополнения для элементов $a_{i\,j}$ матрицы А, $i=1...n,\ j=1...n$

3.3 Практическое занятие 3 (ПЗ-3): Системы линейных уравнений.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Решение системы в матричном виде.

Этот метод применим для систем n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \text{...}\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+...+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

Введем в рассмотрение матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ .... & .... & ... & ....\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}_{n\times n} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ ....\\ x_n\end{pmatrix}_{n\times 1} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ ....\\ b_n\end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$A\cdot X=B$ -матричное уравнение, которое позволяет записать СЛУ в матричном виде.

Чтобы найти X, умножим равенство с обеих сторон слева на A^{-1}

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

$$E\cdot X=A^{-1}\cdot B$$

$$\boxed{X=A^{-1}\cdot B}$$

Получили решение СЛУ в матричной форме.

2. Решение системы по формулам Крамера.

Теорема Крамера: Система n линейных уравнений с n неизвестными, определитель которой $\Delta\neq 0$ имеет решение и при этом единственное, определяемое по формулам $\boxed{x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta}}$, где Δ_j $(j=1...n)$-определитель, получаемый из определителя системы Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам.
Если $\Delta = 0$ и хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_j \neq 0$, то система не имеет решений.
Если $\Delta = 0$ и $\Delta_j = 0$, то система либо имеет множество решений, либо не имеет решений. Нужны дополнительные исследования.
3. Решение системы метод Гаусса. Ранг матрицы. Исследование решения систем. Однородные системы линейных уравнений.
Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований системы переходим к равносильной СЛУ ступенчатого или треугольного вида, из которой последовательно находят все переменные.
Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности СЛУ): Для того, чтобы система m линейных уравнений с n неизвестными была совместной (имела решение) необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы был равен рангу расширенной матрицы.
Если rangA=rangB=r, то система совместна, причем:
1) если r=n (n-число неизвестных), то система имеет единственное решение.
2) если r<n, то система имеет бесчисленное множество решение, зависящих от (n-r) параметров.
Если rangA$\neq$rangB, то система несовместна.

3.4 Практическое занятие 4 (ПЗ-4): Векторы.
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Действия над векторами в геометрической и координатной форме.
Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной тачкой А и конечной точкой В, который можно перемещать параллельно самому себе.
Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом первого слагаемого вектора, а конец – с концом второго, при условии, что начало вектора $\bar{b}$ лежит в конце вектора $\bar{a}$.
Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется новый вектор $\vec{c}$, начало которого лежит в конце вычитаемого вектора $\bar{b}$, а конец – в конце уменьшаемого вектора $\bar{a}$, при условии, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало.
Координатами вектора $\bar{a}$ называются координаты конечной точки его радиус-вектора.
Для векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ *и* $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ действия в координатной форме имеют вид:

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, то $\vec{d} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$

$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, то $\vec{b} = (\lambda \cdot x_1; \lambda \cdot y_1; \lambda \cdot z_1)$

2. Длина вектора.
Длина вектора находится по формуле:

$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$ или $\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$ *и* $B(x_2; y_2)$ можно находить как длину вектора $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Поэтому $\boxed{d(A,B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$

3. Скалярное произведение векторов.

Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\vec{a};\hat{}\,\vec{b})}.$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2}$$

4. Проекция вектора на ось, ее свойства.

Алгебраической проекцией (проекцией) вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число, совпадающее с длиной вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow l$ (одинаково направлены); отрицательное число, совпадающее с длиной вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, если $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow l$; 0- если $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен l.

Проекция вектора на ось равна произведению длины этого вектора на косинус угла между вектором и осью

$$\boxed{Пр_l\,\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi}$$

Проекция вектора на направление другого вектора равна отношению скалярного произведения векторов на длину того вектора, на который опускается проекция

$$\boxed{Пр_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}}.$$

3.5 Практическое занятие 5 (ПЗ-5): Векторное пространство векторов.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Разложение вектора по базису.

Упорядоченная пара двух ненулевых, не коллинеарных векторов образует базис на плоскости.

Упорядоченная система трёх ненулевых, не кокомпланарных векторов образуют базис в пространстве.

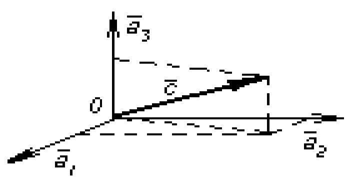
Множество векторов с действительными координатами, в котором определены операции сложения и умножения на число, удовлетворяющие приведенным выше восьми свойствам, называется векторным пространством.

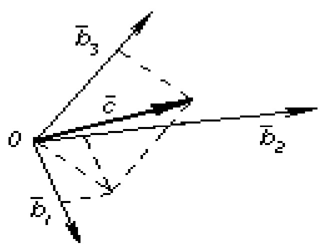
Теорема: Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис, то любой вектор $\vec{c}$, компланарный с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Равенство $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$ означает, что $\vec{c}$ разложен по базисным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причем коэффициенты α и β - числа, которые являются координатами вектора $\vec{c}$ в базисе $(\vec{a};\vec{b})$.

2. Переход к новому базису.

Пусть в пространстве R имеются два базиса: старый $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ и новый $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3$





Один и тот же вектор $\vec{c}$ имеет различные координаты в различных базисах.
Пусть в старом базисе $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}$ вектор $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$. Найдем координаты вектора $\vec{c}$ в новом базисе $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$.
Пусть $\vec{b_1} = (b_{11}; b_{12}; b_{13})$, $\vec{b_2} = (b_{21}; b_{22}; b_{23})$, $\vec{b_3} = (b_{31}; b_{32}; b_{33})$. Обозначим неизвестные координаты вектора $\vec{c} = (x; y; z)$ относительно нового базиса $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$.
Разложим вектор $\vec{c}$ по векторам базиса $\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}$:

$$\vec{c} = x \cdot \vec{b_1} + y \cdot \vec{b_2} + z \cdot \vec{b_3}$$

$$(c_1; c_2; c_3) = x \cdot (b_{11}; b_{12}; b_{13}) + y \cdot (b_{21}; b_{22}; b_{23}) + z \cdot (b_{31}; b_{32}; b_{33})$$

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{12}y + b_{13}z = c_1 \\ b_{21}x + b_{22}y + b_{23}z = c_2 \\ b_{31}x + b_{32}y + b_{33}z = c_3 \end{cases}$$

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными x, y, z, найдем искомые координаты.

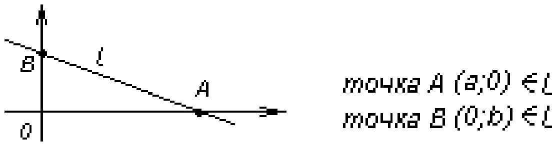
4. Отыскание собственных векторов и собственных значений матриц.
Число λ называется собственным значением матрицы A, если выполняется равенство

$$\boxed{\Delta(A - \lambda E) = 0}$$

Вектор $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, $\vec{x} \neq \vec{0}$ называется собственным вектором, соответствующим собственному значению λ, если $(A - \lambda E) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}$.

3.6 Практическое занятие 6 (ПЗ-6): Уравнение прямой линии на плоскости. Способы задания прямой.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
Угловым коэффициентом *k* прямой l называется тангенс угла наклона между прямой и положительным направлением оси X.
$y = kx + b$ **-** уравнение прямой с угловым коэффициентом *k.*
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
Пусть прямая l проходит через точку $M_1(x_1; y_1)$.
$y - y_1 = k(x - x_1)$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
Пусть $M_1(x_1; y_1) \in l$ и $M_2(x_2; y_2) \in l$.
$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ - формула углового коэффициента прямой, проходящей через две данные точки.
$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
4. Уравнение прямой в отрезках.



$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ - уравнение прямой в отрезках.

5. Угол между двумя прямыми.

Дано: $\begin{matrix} l_1: & y=k_1x+b_1 \\ l_2: & y=k_2x+b_2 \end{matrix}$

$tg\varphi == \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ - угол между двумя прямыми.

Углом между двумя прямыми называется угол поворота одной прямой по отношению к другой против хода часовой стрелки.

6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны. $k_1=k_2$

Обратное утверждение тоже справедливо.

Если прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1. $k_1k_2=-1$

Если прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.

Обратное утверждение тоже справедливо.

3.7 Практическое занятие 7 (ПЗ-7): Уравнение прямой линии на плоскости. Способы задания прямой.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Общее уравнение прямой, его частные случаи.

В ПДСК любая прямая задается уравнением первой степени $\boxed{Ax+By+C=0}$, где $A\neq 0$ или $B\neq 0$.

Обратное утверждение тоже верно, т.е. данное уравнение при произвольных коэффициентах A, B и C ($A\neq 0$ или $B\neq 0$) определяет некоторую прямую в ПДСК.

Чтобы найти точку пересечения прямых l_1 и l_2 нужно решить систему, составленную из уравнений этих прямых.

$$\begin{matrix} l_1: \\ l_2: \end{matrix}\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

2. Расстояние от точки до прямой.

Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к прямой l, называется нормальным вектором прямой l.

$l: Ax+By+C=0 \quad\Rightarrow\quad \vec{n}=(A;B)$.

$\boxed{d(M_0;l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$ - расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $l: Ax+By+C=0$

3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.

$\vec{n}=(A;B)$ - нормальный вектор прямой и $M_0(x_0;y_0)$ принадлежит прямой.

Тогда $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

$\vec{p} = (\alpha; \beta)$ - направляющий вектор прямой и $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит прямой.

Тогда $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

3.8 Практическое занятие 8 (ПЗ-8): Линии второго порядка.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Построение линий второго порядка. Нахождение их основных элементов.

Окружностью с центром в точке C и радиусом R называется множество точек плоскости M, равноудаленных от точки C на расстояние R.

$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$ - каноническое уравнение окружности с центром в точке $C(x_0; y_0)$ и радиусом R.

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (называемых фокусами) есть величина постоянная, больше чем расстояние между фокусами.

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ - каноническое уравнение эллипса, где $\boxed{c^2 = a^2 - b^2}$

Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая расстояния между фокусами.

$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ - каноническое уравнение гиперболы, где $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Параболой называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

$\boxed{y^2 = 2px}$ - каноническое уравнение параболы, где p – параметр, $\boxed{F(\frac{p}{2};0)}$ - фокус, $\boxed{x = -\frac{p}{2}}$ - директриса.

2. Составление уравнений линий второго порядка по их основным элементам.

Эксцентриситетом эллипса (ε) называют отношение длин полу фокусного расстояния (c) к большей полуоси (a). $\boxed{\varepsilon = \frac{c}{a}}$, $\underline{\underline{0 < \varepsilon < 1}}$

Эксцентриситетом гиперболы (ε) называют отношение длин полу фокусного расстояния (c) к действительной полуоси (a).

$\boxed{y = \frac{b}{a}x}$ и $\boxed{y = -\frac{b}{a}x}$ - асимптоты гиперболы

$A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$ – вершины гиперболы

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ – фокусы гиперболы

Различные случаи расположения параболы (ветви вверх, вниз, влево, вправо, с вершиной в точке (0,0) и со смещенной вершиной.

3.9 Практическое занятие 9 (ПЗ-9): Плоскость и прямая в пространстве.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Способы задания плоскости в пространстве.

Уравнение $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C и D– некоторые действительные числа (A, B, C не обращаются одновременно в 0), задает в пространстве плоскость.
Обратное утверждение тоже верно: Любую плоскость в пространстве можно задать уравнением вида $Ax + By + Cz + D = 0$.

Направляющим вектором $\vec{p}$ плоскости называется вектор, лежащий в этой плоскости или в плоскости, параллельной ей.

Вектор $\vec{n}$ называется нормальным вектором плоскости, если он перпендикулярен этой плоскости.
Если плоскость π задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\boxed{\vec{n} = (A;B;C)}$ является нормальным вектором плоскости π.

$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}$ - уравнение плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором.

$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0}$ - уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

2. Уравнение прямой в пространстве.
Рассмотрим ПДСК и две плоскости: $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

$\boxed{l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}}$ - общее уравнение прямой в пространстве.

Пусть дан направляющий вектор $\vec{p} = (\alpha;\beta;\gamma) \parallel l$ и точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, принадлежащая прямой.

$\boxed{\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}}$ - каноническое уравнение прямой.

$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$ - уравнение прямой, проходящей через две точки.

3. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.
Условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
$l : \frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z - z_0}{\gamma}$ и $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$: $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma}$.
Углом φ между прямой l и плоскостью π называется острый угол между прямой и её проекцией на плоскость.

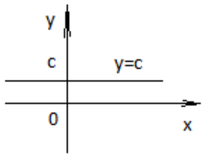
$$\boxed{\sin\varphi = \frac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}}.$$

3.10 Практическое занятие 10 (ПЗ-10): Функция одной переменной.
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Область определения и область значений функции.
Пусть X и У – некоторые множества. Функцией называется зависимость, по которой каждому $x \in X$ ставится в соответствие единственное значение $y \in Y$.
Множество значений x, при которых функция существует, называется областью определения функции.

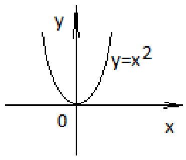
Область определения находится по соблюдению законности выполнения математических операций, входящих в формулу $f(x)$. Именно: подкоренное выражение в корне четной степени не отрицательно, знаменатель дроби не равен 0, выражение под знаком логарифма – положительно и т.д.

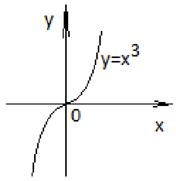
2. Элементарные функции, их графики.

Классификация функций:

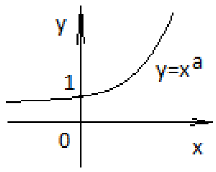


$f(x) = C$ - постоянная функция $C = const$

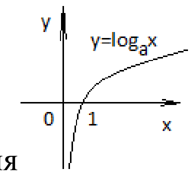




$x^{\alpha}, \quad \alpha \in R$ - степенная функция



$a^{x}, \quad a > 0$ - показательная функция



$\log_a x, \quad a > 0, a \neq 1$ - логарифмическая функция

$\sin x, \cos x, tgx, ctgx$ - тригонометрические функции

$\arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx$ - обратные тригонометрические функции

3. Исследование на четность, нечетность функции.

Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной, если для любых значений аргумента из области её определения выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

3.11 Практическое занятие 11 (ПЗ-11): Числовые последовательности.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Понятие числовой последовательности.

Если каждому натуральному числу n ставится в соответствие единственное число x_n, то занумерованное множество действительных чисел $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ называется числовой последовательностью.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной, если существуют числа A и B, такие, что выполняется неравенство $A \leq x_n \leq B$.

2. Предел числовой последовательности.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, что при всех n>N выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся.

Записывается: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ или $x_n \to a$; $n \to \infty$.

Если предел последовательности не существует или равен ∞, то последовательность называется расходящейся.
Число а называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε существует такой номер N, начиная с которого все элементы последовательности x_n с номерами n>N , попадут в ε - окрестность точки а.
3. Основные свойства сходящихся последовательностей.
- Если все элементы бесконечно малой последовательности $\{x_n\}$ равны одному и тому же числу с, то с=0.
- Теорема о единственности предела: Сходящаяся последовательность имеет только один предел.
- Сходящаяся последовательность ограничена.
- Сумма (разность) сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме (разности) пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.
- Произведение сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен произведению пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.
- Частное двух сходящихся последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ есть сходящаяся последовательность, предел которой равен частному пределов последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, при условии, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, причем начиная с некоторого номера выполняется неравенство $x_n \geq b$ $(x_n \leq b)$, то $a \geq b$ $(a \leq b)$.
- Произведение бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности или числа есть бесконечно малая последовательностью
- Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.
- Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то последовательность $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ есть бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$.

3.12 Практическое занятие 12 (ПЗ-12): Предел функции.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Предел функции в точке и на бесконечности. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Теоремы о пределах функций.
Число А называется пределом функции $f(x)$ в точке а (или пределом функции при $x \to a$), если для любой сходящейся к а последовательности значений аргумента, отличных от а и стремящихся к а, соответствующая последовательность значений функции сходится к числу А.

$$A = \lim_{x\to a} f(x), \quad \text{если} \quad \forall\{x_n\}, n \in N: \left.\begin{array}{l} 1)\ \{x_n\} \in X \\ 2)\ x_n \neq a \\ 3)\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \cdot$$

Функция $f(x)$ имеет в точке а предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют левый и правый пределы, причем они равны. В таком случае предел функции равен односторонним пределам.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке а пределы A и B. Тогда функции $f(x) \pm g(x), \quad f(x)\cdot g(x) \quad и \quad \dfrac{f(x)}{g(x)} \quad (B \neq 0)$ имеют в точке а пределы, равные, соответственно $A \pm B, AB \quad и \quad \dfrac{A}{B}$.

Постоянный множитель можно вынести за знак предела $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f(x) = C\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Предел от элементарной функции равен значению функции от предела выражения, стоящего под знаком функции.

В частности, предел степени для элементарной функции равен степени предела $\lim\limits_{x\to a} f^{\,m}(x) = (\lim\limits_{x\to a} f(x))^m$.

2. Раскрытие неопределенностей.

Зачастую вычисление пределов связано с простыми приемами: разложением числителя и знаменателя на множители, делением числителя и знаменателя на степень x и т.д. Может оказаться, что при отыскании предела частного двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to a$, числитель и знаменатель стремятся к 0 или числитель и знаменатель стремятся к ∞. В таком случае говорят, что дробь при $x \to a$ представляет собой неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, а нахождение предела дроби называют раскрытием неопределенности.

3. Два замечательных предела.

Предел функции $\dfrac{\sin x}{x}$ в точке x=0 существует и равен единице $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1}$ - первый замечательный предел.

Предел функции $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ существует и равен e $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e}$ - второй замечательный предел.

Обозначим $\dfrac{1}{x} = \alpha$, является бесконечно малой при $x \to \infty$, т.е. $\alpha \to 0$. Тогда

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e}$$

Число e является одной из фундаментальных величин в математике. Показательная функция вида e^{ax} называется экспонентой.

4. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.

Если функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ определены в некоторой окрестности $U_\varepsilon(a)$, являются бесконечно малыми в точке a, причем $\beta(x) \neq 0$ для $\forall x \in U_\varepsilon(a)$ и выполняется неравенство $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными между собой бесконечно малыми функциями в точке a.

Таблица эквивалентных бесконечно малых (при $x \to 0$):

1) $\sin x \sim x$	4) $arctgx \sim x$	7) $a^x - 1 \sim x\cdot\ln a$
2) $tgx \sim x$	5) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$	8) $\ln(1+x) \sim x$
3) $\arcsin x \sim x$	6) $e^x - 1 \sim x$	9) $(1+x)^k - 1 \sim k\cdot x$, $k > 0$

5. Левый и правый пределы функции.

Введем понятие односторонних пределов функции, когда вся последовательность значений аргумента $\{x_n\}$: $x_n \to a$ расположена слева от точки a (левый предел), либо справа от неё (правый предел). Т.е. либо $x_n < a$, либо $x_n > a$ при всех *n*. Для правого (левого) предела функции используется символическая запись $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x \to a-} f(x) = A\right)$.

3.13 Практическое занятие 13 (ПЗ-13): Непрерывные функции. Асимптоты графика функции.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Непрерывность функции в точке и на интервале.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она удовлетворяет следующим трём условиям: 1) $f(x)$ определена в точке x_0 (т.е. существует $f(x_0)$)

2) существует конечный предел в точке x_0 ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$)

3) этот предел равен значению функции в точке x_0 ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$)

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если существуют конечные пределы функции справа $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ и слева $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной на интервале $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

2. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.

Точка, в которой не выполняется условие непрерывности, называется точкой разрыва.

Точка x_0 называется точкой разрыва I рода , если существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$.

При этом: 1) если $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, то точка x_0 называется устранимым разрывом I рода.

2) если $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$, то - разрыв со скачком.

Точка x_0 называется точкой разрыва II рода , если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен $\pm\infty$.

3. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

Пряма линия называется асимптотой для кривой $y = f(x)$, если расстояние d от точки M, лежащей на кривой до прямой стремится к 0 при удалении точки M от начала координат в бесконечность.

Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$ равно $+\infty$ или $-\infty$.

Если $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} f(x) = A$, то прямая $y = A$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Если существуют такие числа k и b, что $\boxed{k = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x}}$, $\boxed{b = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} (f(x) - kx)}$, то прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

3.14 Практическое занятие 14 (ПЗ-14) Производная функции.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Геометрический, механический и экономический смысл производной.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует).

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен значению производной функции в этой точке. $\boxed{k = f'(x_0)}$

Производная от пути по времени равна скорости при неравномерном прямолинейном движении в данный момент времени t_0. $\boxed{v_{мгн} = S'(t_0)}$

Производительность труда в момент времени t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, при $\Delta t \to 0$, т.е. $z = u'(t_0)$.

Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает предельные издержки производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Эластичностью функции $E_x(y)$ называется предел относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y = f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

2. Правила дифференцирования.

$$\boxed{(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)}$$

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

3. Дифференцирование сложной и обратной функций.

Если $y = f(t)$ и $t = \varphi(x)$ - дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по независимой переменной x, т.е. $\boxed{y'(x) = f'(t) \cdot \varphi'(x)}$

Для дифференцируемой функции с производной, не равной 0, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, т.е.

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}}$$

4. Дифференцирование показательно - степенной функции.

Если $y = (U(x))^{V(x)}$, тогда $\boxed{(U^V)' = U^V \cdot \ln U \cdot V' + V \cdot U^{V-1} \cdot U'}$

5. Производная неявной функции.

Рассмотрим дифференцирование неявной функции, заданной в виде $F(x, y) = 0$. Для нахождения производной функции y, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, рассматривая y как функцию от x, а затем из полученного уравнения найти производную y'.

6. Производные высших порядков.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$ и пусть $\exists f'(x)$ - производная первого порядка. Очевидно, что она сама представляет некоторую функцию, зависящую от x. Если существует $f''(x) = (f'(x))'$, то она называется производной второго порядка данной функции и т.д. Аналогично можно рассматривать $f'''(x)$, $f^{(IV)}(x)$, $f^{(V)}(x)$... Производной n-го порядка называется производная от производной $(n$-1)-го порядка.

Вторая производная пути по времени $S''(t) = (S'(t))' = v'(t)$ есть скорость изменения скорости или **ускорение** точки в момент времени t.

$$\boxed{a(t) = v'(t) = S''(t)}$$

3.15 Практическое занятие 15 (ПЗ-15): Дифференциал функции.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Определение дифференциала.

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если ее приращение Δy в этой точке можно представить в виде $\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где A – некоторое число, не зависящее от Δx, $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 называется главная, линейная относительно Δx часть полного приращения функции.

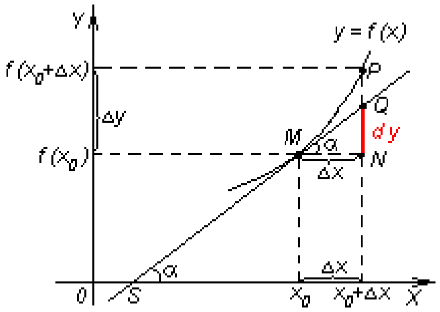
$dy = A \cdot \Delta x$

Учитывая, что $A = f'(x_0)$, имеем $\boxed{dy = f'(x_0) \cdot \Delta x}$

Пусть $f(x) = x$, т.е. y=x, тогда $dx = (x)' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, т.е. $dx = \Delta x$. Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной.

$$\boxed{dy = f'(x_0) \cdot dx}$$

2. Геометрический смысл.



Дифференциал функции равен по величине отрезку NQ, когда аргумент x получил приращение $\Delta x = MN$.

Т.о. дифференциал функции равен приращению ординаты касательной MS к графику этой функции в точке x_0. А приращение функции $\Delta y = PN$ есть приращение ординаты самой функции f(x) в точке x_0.

3. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.

$\Delta y - dy \approx 0$

При этом абсолютная погрешность равна $|\Delta y - dy|$.

Приближенные вычисления с помощью дифференциала удобно проводить по формуле:

$f(x_0 + \Delta x) = f'(x_0)\Delta x + f(x_0)$.

3.16 Практическое занятие 16 (ПЗ-16): Применение дифференциального исчисления к исследованию функции.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Возрастание и убывание графика функции.

Функция называется возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

ТЕОРЕМА (признак монотонности): Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и внутри интервала $f'(x) > 0$ $\left[f'(x) < 0 \right]$, то график функции $y = f(x)$ возрастает [убывает] на интервале $(a;b)$.

Функция $y = f(x)$ имеет максимум [минимум] в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек, отличных от x_0 и принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $\left[f(x) > f(x_0) \right]$.

ТЕОРЕМА (необходимое условие экстремума): Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то производная функции в этой точке равна нулю или не существует.

ТЕОРЕМА (достаточное условие экстремума): Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема во всех точках своей области определения, и точка x_0 принадлежит области определения. Если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку x_0 меняет знак с «+» на «-», то x_0 - точка максимума, если с «-» на «+», то x_0 - точка минимума, а если производная знака не меняет, то в точке x_0 экстремума нет.

2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывную на отрезке $[a;b]$.

План нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$

- Находим область определения функции. Проверяем, принадлежит ли отрезок $[a;b]$ области определения.
- Находим точки экстремума функции и выбираем те из них, которые принадлежат отрезку $[a;b]$.
- Находим значения функции на концах отрезка ($f(a)$ *и* $f(b)$) и значения функции в точках экстремума.
- Выбираем из всех полученных значений наибольшее и наименьшее.

3. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба.

График дифференцируемой функции называется выпуклым [вогнутым] в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже [выше] любой своей касательной в этом интервале.

ТЕОРЕМА: Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала $(a;b)$ и если во всех точках этого интервала $f''(x) > 0$, то график функции вогнутый в интервале $(a;b)$, если же $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый в интервале $(a;b)$.

ТЕОРЕМА (необходимое условие точки перегиба): Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, то вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.

ТЕОРЕМА (достаточное условие точки перегиба): Пусть x_0 - стационарная точка. Если, проходя через стационарную точку, вторая производная меняет знак, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

3.17 Практическое занятие 17 (ПЗ-17): Полное исследование функции.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Алгоритм исследования функции.

- Найти область определения функции D_y.
- Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции, определить их род.
- Найти асимптоты графика функции.
- Если возможно, найти пересечение графика функции с осями координат. Если отыскание точек пересечения затруднительно, то посмотреть координаты по графику (приблизительно).
- Исследовать функцию на четность / нечетность.
- Определить интервалы монотонности и точки экстремума функции.
- Определить интервалы выпуклости и вогнутости, найти точки перегиба графика функции.
- Построение по пунктам исследования (построение графика принято начинать с построения асимптот).
- Определить множество значений функции E_y.

2. Исследование функции. Построение графика.

Исследовать функцию и построить графики нескольких функций по данному плану.

3.18 Практическое занятие 18 (ПЗ-18): Функция двух переменных.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Область определения функции двух переменных.

Функцией f двух переменных $z = f(x, y)$ называется зависимость (закон), по которой каждой паре значений (x, y) из некоторой области $D(x, y)$ соответствует единственное значение $z \in E$.

Область определения функции D геометрически представляет собой некоторую часть плоскости Oxy, ограниченную линиями, которые могут принадлежать или не принадлежать этой области. В первом случае область D называется замкнутой и обозначается $\overline{D}$, во втором – открытой.

2. Частные производные первого и второго порядка.

Если переменной x дать некоторое приращение Δx, y оставить постоянной, то функция $z = f(x, y)$ получит приращение $\Delta_x z$, называемое частным приращением функции z по переменной x.

Аналогично, если переменная y получает приращение Δy, а x остается постоянной, то частным приращением функции z по переменной y:

Если существуют пределы $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = \dfrac{\partial z}{\partial x} = z'_x = f'_x(x, y)$ и $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = \dfrac{\partial z}{\partial y} = z'_y = f'_y(x, y)$, то они называются частными производными функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y соответственно.

3. Полный дифференциал.

Дифференциал функции $z = f(x, y)$, найденный при условии, что одна из независимых переменных изменяется, а вторая остается постоянной, называется частным дифференциалом

$d_x z = f'_x\,(x,y)dx$ и $d_y z = f'_y\,(x,y)dy$, где $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$ - произвольные приращения независимых переменных, называемых их дифференциалами.
Полным приращением функции $z = f(x,y)$ называется разность $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$.
Полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$ называется главная, линейно зависящая от приращений независимых переменных Δx и Δy, часть полного приращения функции и обозначается dz.

4. Производная по направлению. Градиент.
Производная функции $z = f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) в направлении вектора $\vec{\rho}$ представляет собой скорость изменения функции в данном направлении и находится по формуле:

$$f'_\rho(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора $\vec{\rho}$.
Градиент функции в данной точке – это вектор, который указывает направление наиболее быстрого возрастания функции. Его координаты:

$$gradz\left(f'_x(x_0,y_0); f'_y(x_0,y_0)\right).$$

Величина градиента $|gradz| = \sqrt{(f'_x(x_0,y_0))^2 + (f'_y(x_0,y_0))^2}$ определяет крутизну наибольшего ската или подъема поверхности $z = f(x,y)$.
5. Необходимое и достаточное условия экстремума.
Если для функции $z = f(x,y)$, определенной в некоторой области, в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ верно неравенство

$$f(x_0,y_0) > f(x,y) \quad [\,f(x_0,y_0) < f(x,y)\,],$$

то точка $M_0(x_0,y_0)$ называется точкой максимума [минимума].

Необходимое условие экстремума: если функция $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) имеет экстремум, то в этой точке частные производные равны нулю $f'_x(x_0,y_0) = 0,\quad f'_y(x_0,y_0) = 0$ или не существуют.

Точки (x_0, y_0), в которых выполняется необходимое условие, называются критическими точками.

Достаточное условие экстремума: пусть в окрестности критической точки (x_0,y_0) функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Обозначим $f''_{x^2}(x_0,y_0) = A$, $f''_{xy}(x_0,y_0) = B$, $f''_{y^2}(x_0,y_0) = C$, найдем $\Delta = AC - B^2$.

1) Если $\Delta > 0$, то в точке (x_0,y_0) функция $f(x,y)$ имеет экстремум, если $A < 0$ - максимум, если $A > 0$ - минимум.

2) Если $\Delta < 0$, то в точке (x_0,y_0) функция $f(x,y)$ не имеет экстремума.

3) Если $\Delta = 0$, вывод о наличии экстремума сделать нельзя.

6. Функция Кобба-Дугласса.
Производственная функция Кобба-Дугласа описывает взаимосвязь валового внутреннего продукта Y с объемом производственных фондов (капитала) K и объемом занятых в производстве трудовых ресурсов L:

$$Y = A\,K^\alpha\,L^\beta$$

Здесь A – коэффициент нейтрального технического прогресса, $\alpha = E_K(Y) = Y'_K \cdot \frac{K}{Y}$ и $\beta = E_L(Y) = Y'_L \cdot \frac{L}{Y}$ – коэффициенты эластичности валового внутреннего продукта по капитальным и трудовым затратам.

3.19 Практическое занятие 19 (ПЗ-19): Первообразная и неопределенный интеграл.
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Непосредственное интегрирование.
Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.
Множество первообразных $F(x)+C$, где C=const, называется __неопределённым интегралом от функции $f(x)$ по переменной x и обозначается символом:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Основные свойства неопределённого интеграла:
1) $(\int f(x)dx)' = f(x) \quad u \quad d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
2) $\int dF(x) = F(x) + C$
3) $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$
4) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
2. Замена переменной.
Часто подстановка $x = \varphi(t)$ (или $\psi'(x) = t$) позволяет перейти к непосредственному интегрированию, тогда:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt, \text{ где } x = \varphi(t),\ dx = \varphi'(t)dt.$$

3. Интегрирование по частям.
$\int udv = uv - \int vdu$.
Классы интегралов, берущихся по частям:

$$\text{I класс: } \left.\begin{matrix} \int P(x)e^{ax}dx \\ \int P(x)\sin axdx \\ \int P(x)\cos axdx \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} a \in R \\ u = P(x) \\ dv = \begin{cases} e^{ax}dx \\ \sin axdx \\ \cos axdx \end{cases} \end{matrix}$$

$$\text{II класс: } \left.\begin{matrix} \int P(x)\ln axdx \\ \int P(x)\arcsin axdx \\ \int P(x)\arccos axdx \\ \int P(x)arctgaxdx \\ \int P(x)arcctgaxdx \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} a \in R \\ u = \begin{cases} \ln ax \\ \arcsin ax, \arccos ax \\ arctgax, arcctgax \end{cases} \\ dv = P(x)dx \end{matrix}$$

3.20 Практическое занятие 20 (ПЗ-20): Интегрирование рациональных функций.
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Разложение рациональной дроби на простейшие.
Если $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x)=(x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\ldots(x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\ldots+\frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i – некоторые постоянные величины.

2. Интегрирование рациональных функций.
При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i применяют так называемый метод неопределенных коэффициентов, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях x.

3.21 Практическое занятие 21 (ПЗ-21): Определенный интеграл.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Вычисление определенных интегралов. Формула Ньютона – Лейбница.

Формула Ньютона – Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

Основные свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx$;

2) $\int\limits_a^b (f_1(x)\pm f_2(x))dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx$;

3) $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$;

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

5) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

2. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла.
Определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x).
Если функция z = f (t) задает изменение производительности некоторого производства с течением времени t , то объем выпущенной продукции и за промежуток времени [0,T] находится по формуле:

$$u=\int\limits_0^T f(t)dt.$$

Если функция $P = f(Q)$ характеризует зависимость между ценой единицы товара P и количеством товара Q, то потребительский излишек находится по формуле:

$$CS=\int\limits_0^{Q^*} f(Q)dQ - P^*Q^*,$$

где Q* - количество товара, которое приобретает покупатель по равновесной цене P*.
Излишек производителя:

$$PS = P^*Q^* - \int\limits_0^{Q^*} f(Q)dQ.$$

3. Методы интегрирования в определенном интеграле.
Замена переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a),$$

где f(x)–непрерывная функция на отрезке [a,b], подстановка: x=φ(t), «новые» пределы интегрирования находятся из условий: φ(α)=a, φ(β)=b.

Интегрирование по частям: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$

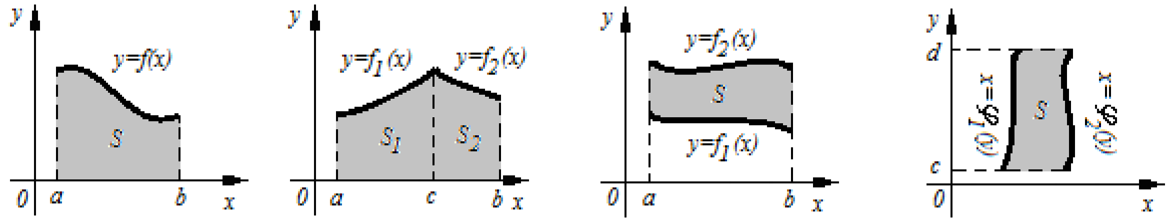
3.22 Практическое занятие 22 (ПЗ-22): Приложения определенного интеграла.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Площадь фигур на плоскости.

Определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x).

Частные случаи:



$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|; \quad S = \int_a^c f_1(x)dx + \int_c^b f_2(x)dx; \quad S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx; \quad S = \int_c^d (\varphi_2(y) - \varphi_1(y))dy$$

2. Нахождение объема тела вращения.

Пусть функция f(x) непрерывна на некотором отрезке. Если соответствующую ей криволинейную трапецию вращать вокруг оси Ox или Oy, то получим тела вращения, для которых можно вычислить площадь поверхности и объем.

По оси Ox: $S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, $V = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx$.

По оси Oy: $S = 2\pi\int_c^d \varphi(y)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy$, $V = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy$.

3.23 Практическое занятие 23 (ПЗ-23): Несобственные интегралы.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Несобственные интегралы первого рода.

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на интервале [a,∞), тогда она непрерывна на любом отрезке [a,b].

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то этот предел называется несобственным интегралом от функции f(x) на интервале [a,∞): $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx$. Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл сходится. Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.

Аналогично: $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$ и $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$.

2. Несобственные интегралы второго рода.
Если в точке $x = c$ функция либо неопределенна, либо разрывна, то

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to c-0}\int_a^b f(x)dx .$$

Если в точке $x = a$ функция терпит разрыв, то $\int_a^c f(x)dx = \lim_{b\to a+0}\int_b^c f(x)dx$.

Если функция $f(x)$ имеет разрыв в точке $x = b$ на промежутке $[a,c]$, то

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx .$$

Таких точек внутри отрезка может быть несколько.

3.24 Практическое занятие 24 (ПЗ-24): Комплексные числа.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Определение комплексных чисел.
Алгебраическая форма комплексного числа:

$$z = x + yi ,$$

где x – действительная часть, y_i – мнимая часть, y – коэффициент при мнимой части, $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, квадрат мнимой единицы - отрицательное число: $i^2 = -1$.
2. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
Для чисел $z_1 = x_1 + y_1 i$ и $z_2 = x_2 + y_2 i$.
Сумма (разность): $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2) i$.
Произведение: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1) i$.
Произведение комплексно сопряженных чисел есть сумма квадратов действительной части и коэффициента при мнимой части $(x + yi)\cdot(x - yi) = x^2 + y^2$.
Частное: $\dfrac{x_1 + y_1i}{x_2 + y_2i} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \dfrac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} i$.
3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Формула Муавра.

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ - модуль комплексного числа, $\varphi = Arg\, z$ - аргумент комплексного числа, главное значение, удовлетворяющее условию $-\pi < \varphi \le \pi$.
4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.
Произведение: $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
Частное: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$
Возведение в натуральную степень: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.
Извлечение корня: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{n})$, где к принимает значения 0,1,2…(п-1), п$\in N$.

3.25 Практическое занятие 25 (ПЗ-25): Дифференциальные уравнения.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.
Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y=φ(x,C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Решение вида $y=\varphi(x,C_0)$ называется частным решением дифференциального уравнения.

Задачей Коши называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y=\varphi(x,C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Дифференциальное уравнение вида: $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$, где $M_1(x), M_2(x)$ - функции от x, $N_1(y), N_2(y)$ - функции от y, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Такие уравнения решаются разделением переменных и последующем интегрировании:

$$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

2. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ - функции от x или постоянные числа.

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где $p(x)$ и $q(x)$ – функции от x, n – постоянное число, $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Одним из методов решения таких уравнений является метод Бернулли.

Решение уравнения ищут в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x), v(x)$ - неизвестные функции от x.

Учитывая, что $y = uv,\ \ y' = u'v + uv'$, переходим к системе:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = q(x) \end{cases}.$$

Решив систему, находим функции $u(x), v(x)$ и общее решение уравнения $y = u(x) \cdot v(x)$.

3.26 Практическое занятие 26 (ПЗ-26): Дифференциальные уравнения первого порядка.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ - функции от x или постоянные числа.

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где $p(x)$ и $q(x)$ – функции от x, n – постоянное число, $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Одним из методов решения таких уравнений является метод Бернулли.

Решение уравнения ищут в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x), v(x)$ - неизвестные функции от x.

Учитывая, что $y = uv,\ \ y' = u'v + uv'$, переходим к системе:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = q(x) \end{cases}.$$

Решив систему, находим функции $u(x), v(x)$ и общее решение уравнения $y = u(x) \cdot v(x)$.

2. Однородные дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x;y)$ называется однородным 1-го_порядка, если функция $f(x;y)$ удовлетворяет условию: $f(tx,ty) = f(x,y)$, где t - произвольный параметр.

Однородные дифференциальные уравнения решаются подстановкой:

$z = \frac{y}{x}$, откуда $y = xz$, $y' = z'x + zx' = z'x + z$,

где z - функция от x. В результате подстановки, получаем уравнение с разделяющимися переменными $z'x + z = f(x; zx)$, решив которое, делаем обратную подстановку (возвращаемся к функции y).

3. Разностные уравнения.

Обыкновенным разностным уравнением называется уравнение, связывающее значения одного независимого аргумента x, его функции Y_x и разностей различных порядков этой функции DY_x, D^2Y_x, D^3Y_x,.... Такое уравнение можно записать в общем виде следующим образом:

$$j(x, Y_x, DY_x, D^2Y_x\ D^3Y_x, D^nY_x) = 0,$$

которое по форме аналогично дифференциальному уравнению.

Порядком разностного уравнения называется порядок наивысшей разности, входящей в это уравнение. Разностное уравнение (1) часто удобнее записать, пользуясь не разностями неизвестной функции, а ее значениями при последовательных значениях аргумента, то есть выразить DY_x, D^2Y_x, D^3Y_x,... через Y_x, Y_{x+1}, Y_{x+2},.... Уравнение можно привести к одной из двух форм:

$$y(x, Y_x, Y_{x+1},...,Y_{x+n}) = 0,$$
$$x(x, Y_x, Y_{x-1},...,Y_{x-n}) = 0.$$

Общее дискретное решение Y_x обыкновенного разностного уравнения *n*-го порядка представляет функцию x (x = 0, 1. 2,...), содержащую ровно *n* произвольных постоянных:

$$Y_x = Y(x, C_1, C_2,..., C_n).$$

Примером служит паутинообразная модель рынка.

3.27 Практическое занятие 27 (ПЗ-27): Дифференциальные уравнения высших порядков.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. ЛОДУ второго порядка.

Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) 2 пор. с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q - действительные числа.

Обозначим $y''k^2, y' = k, y = k^0 = 1$. Получим характеристическое уравнение: $k^2 + pk + q = 0$.

Общее решение ЛОДУ будет зависеть от корней характеристического уравнения k_1 *и* k_2 следующим образом:

1) $D > 0$, $k_1 \neq k_2$, то $y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$, где C_1 *и* C_2 - постоянные;

2) $D = 0$, $k_1 = k_2$, то $y = C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}$, где C_1 *и* C_2 - постоянные;

3) $D < 0$, $k_{1/2} = \alpha \pm \beta i$, то $y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$, где α, β, C_1 *и* C_2 - постоянные.

2. ЛНДУ второго порядка.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) 2 пор. с постоянными коэффициентами называется уравнение вида: $y'' + py' + qy = f(x)$, где $f(x)$ - функция от x, p и q – действительные числа.

Общее решение данного ЛНДУ есть сумма y_0 - общего решения соответствующего ЛОДУ и y_* - частного решения данного ЛНДУ: $y = y_0 + y_*$.

Правая часть уравнения имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$y_* = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$, где число r показывает сколько раз число $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего ЛОДУ, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени m, где m - большая из степеней m_1 и m_2.

3.28 Практическое занятие 28 (ПЗ-28): Знакоположительные ряды.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Исследование числовых рядов на сходимость.

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ называется числовым рядом. $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где числа $u_1, u_2, ...$ - члены ряда, а u_n – общий член ряда.

Ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся, если сходится последовательность его частичных сумм. Сумма сходящегося ряда – предел последовательности его частичных сумм.

$$\lim S_n = S, \qquad S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если последовательность частных сумм не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется расходящимся.

Необходимое условие сходимости ряда: Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю (т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$). Обратная теорема не верна.

Справедливо утверждение: если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

2. Признаки сходимости знакоположительных рядов.

Признак сравнения: пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ (A) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, b_n > 0$ (B) и для всех $n \in N$ выполняется неравенство $a_n \le b_n$, тогда из сходимости ряда (B) следует сходимость ряда (A), а из расходимости ряда (A) следует расходимость ряда (B).

Предельный признак сравнения: пусть даны два ряда с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$ (A) и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n, b_n > 0$ (B). Если существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = P$, где $P > 0$, то оба ряда (A) и (B) в плане сходимости ведут себя одинаково (т.е. либо оба сходятся, либо оба расходятся).

Предельная форма признака Даламбера: пусть дан ряд с неотрицательны-ми членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$. Если существует $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то при $D < 1$ ряд сходится; при $D > 1$ ряд расходится; при $D = 1$ вопрос о сходимости ряда не решен, признак не подходит.

Предельная форма признака Коши: пусть дан ряд с неотрицательными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n > 0$. Если существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = K$, то при $K < 1$ ряд сходится; при $K > 1$ ряд расходится; $K = 1$ вопрос о сходимости ряда не решен, признак не подходит.

3. Эталонные ряды.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд, расходится.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$, $k \in R$ - обобщенно гармонический ряд. Если k >1, то ряд сходится; если k$\le$1, то ряд расходится.

$\sum_{n=1}^{\infty} a \cdot q^n$, $a \in R$ - геометрический ряд. Если $|q| \ge 1$, то ряд расходится, если $|q| < 1$, то ряд сходится.

3.29 Практическое занятие 29 (ПЗ-29): Знакочередующиеся ряды.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Понятие знакочередующегося ряда.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - .... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n, \text{ где } u_n > 0, \quad n = 1,2,3,...$$

2. Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ абсолютные величины (модули) u_i убывают $u_1 > u_2 > u_3 > ...$ и общий член стремится к нулю $u_n \to 0$, то ряд сходится.

3. Абсолютная и условная сходимость.

Если ряд сходится вместе с рядом, составленным из модулей его членов, то такой ряд называется абсолютно сходящимся.

Если знакочередующийся ряд сходится, а ряд, составленный из модулей его членов расходится, то такой ряд называется условно сходящимся.

3.30 Практическое занятие 30 (ПЗ-30): Степенные ряды.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Радиус и интервал сходимости степенного ряда.

Ряд вида $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$, где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, x_0 \in R$, x - переменная, называется степенным рядом. Обозначение $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

$x_0 - R < x < x_0 + R$ или $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ - интервал сходимости ряда,

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ - радиус сходимости ряда.

Чтобы найти область сходимости ряда, нужно выяснить вопрос о сходимости на концах интервала, т.е. при $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$.

2. Ряд Тейлора и Маклорена.

Если функция f (x) имеет непрерывные производные вплоть до (n+1)-го порядка, то ее можно разложить в степенной ряд Тейлора:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + ...$$

При a = 0 получаем ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + ... + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + ...,$$

где $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ - коэффициенты ряда Маклорена.

3. Применение рядов в приближенных вычислениях.

Разложение некоторых функций в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \quad x \in R$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \quad x \in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ..., \quad x \in R$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + ..., \quad x \in \left(-1;1\right]$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)\cdot x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)\cdot x^3}{3!} + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)\cdot x^n}{n!} + ..., x \in (-1;1)$$

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ..., x \in R$$

С помощью разложения в ряд можно приближенно вычислять значения тригонометрических функций, логарифмов чисел, корней, так называемых «неберущихся» интегралов.

3.31 Практическое занятие 31 (ПЗ-31): Основы теории вероятностей.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Сущность и условия применения теории вероятностей.

Многие явления в окружающем нас мире носят случайный характер. Если некоторое явление повторяется многократно, то его можно описать с помощью чисел. ТВ помогает составить математические модели описания случайных явлений. Причем при построении модели учитываются главные, наиболее существенные особенности изучаемого явления и отбрасываются второстепенные. К примеру, при подбрасывании монеты считаем, что она может упасть «орлом» или «решкой» и не может упасть ребром, не учитываем окружающей среды. При посадке семян, считаем, что все они одинаковы и высаживаются при одинаковых условиях.

2. Классическое и статистическое определения вероятности.

Классическое определение вероятности: Вероятностью события А называется отношение числа исходов испытания, благоприятствующих наступлению события А к общему числу несовместных, единственно возможных элементарных исходов испытания, образующих полную группу:

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность события может принимать значения от 0 до 1: $0 \le P(A) \le 1$.

Статистическое определение вероятности: Относительной частотой события А называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.

Событие С, состоящее в появлении хотя бы одного из событий А или В называется их суммой ($C = A + B,$ или $C = A \cup B$).

Событие С, состоящее в совместном появлении в данном испытании событий А и В называется произведением этих событий ($C = A \cdot B,$ или $C = A \cap B$).

ТЕОРЕМА: Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

ТЕОРЕМА: Вероятность совместного наступления двух независимых событий, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

ТЕОРЕМА: Вероятность появления одного из двух совместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

ТЕОРЕМА: Вероятность совместного наступления двух зависимых событий, равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

ТЕОРЕМА: Вероятность события *A*, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события *A:*

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A).$$

ТЕОРЕМА: Пусть событие *A* может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, тогда вероятность события H_i, $i=1 \ldots n$, вычисленная при условии, что событие *A* уже произошло, вычисляется по формуле Байеса:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

3.32 Практическое занятие 32 (ПЗ-32): Вероятность события при повторных испытаниях.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Формула Бернулли.

Будем проводить n независимых повторных испытаний, в каждом из которых событие А может появиться или не появиться. В дальнейшем будем считать, что вероятность появления события А в каждом таком испытании постоянна и равна p ($p \neq 0$, $p \neq 1$), тогда и вероятность того, что событие А не произойдет будет постоянна и равна q=1- p.

Формула Бернулли

Если вероятность p наступления события А постоянна в каждом испытании, то вероятность того, что событие А наступит к раз в n независимых испытаниях находит по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

2. Локальная теорема Лапласа.

Если вероятность *p* появления события *A* в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие *A* появится *к* раз в *n* независимых испытаниях приблизительно равна (тем точнее, чем больше *n*) значению функции $y = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, при $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ - табличная функция, четная $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

3. Интегральная теорема Лапласа.
Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность того, что событие A появится в n независимых повторных испытаниях от $к_1$ до $к_2$ раз, находится по формуле:

$$P_n(k_1;k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ причем } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ - функция Лапласа, табличная (приложение 8), нечётная, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ и для значений $x \geq 5$, значение функции принимают равным 0,5.
4. Теорема Пуассона.
Применяется для редких событий, вероятность появления которых очень мала ≈ 0.
Пусть вероятность события A в каждом из n независимых повторных испытаний выражается формулой $p = \frac{\lambda}{n}, \lambda > 0, \lambda = const.$ Тогда вероятность того, что в n независимых повторных испытаниях событие A появится $к$ раз можно найти по формуле Пуассона:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \lambda = n \cdot p.$$

5. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний.
Число $к_0$ наступлений события А в n независимых повторных испытаниях называется наивероятнейшим, если вероятность того, что событие А наступит в этих испытаниях $к_0$ раз превышает или не меньше вероятности остальных возможных исходов испытаний.

$$n \cdot p - q \leq k_0 < n \cdot p + p$$

1) если число $n \cdot p - q$ дробное, то имеем только одно значение $к_0$;
2) если число $n \cdot p - q$ целое, то имеется два наивероятнейших значения значений $к_0$ и $к_0+1$.
3) если число $n \cdot p$ целое, то наивероятнейшее число $k_0 = n \cdot p$.

3.33 Практическое занятие 33 (ПЗ-33): Случайные величины.
При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной случайной величины.
Случайная величина – это величина, которая в результате испытания примет одно и только одно из возможных значений, причем заранее не известно какое (обозначение: X, Y, Z,…).
С каждой случайной величиной связывают численное множество – множество значений случайной величины (обозначение: x_1, x_2, x_3,…).
Случайные величины делятся на дискретные и непрерывные.
Дискретной называется случайная величина, которая принимает отдельные изолированные значения с определенными вероятностями. Непрерывной называется случайная величина, которая принимает все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Законом распределения вероятностей дискретной случайной величины называют перечень всех возможных её значений и соответствующих им вероятностей.

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

2. Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех её возможных значений на их соответствующие вероятности.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

Дисперсией дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины и квадратом её математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

Среднее квадратическое отклонение равно арифметическому значению квадратного корня из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

3. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и её свойства. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины.

Функцией распределения случайной величины X называется вероятность события, состоящего в том, что случайная величина X примет значение меньше x.

$$F(X) = P(X < x)$$

Свойства функции распределения:

$0 \le F(X) \le 1$

Функция распределения неубывающая, $x_2 > x_1 \Rightarrow F(x_2) \ge F(x_1)$

$F(X) = 0,$ при $x \le a$

$F(X) = 1,$ при $x \ge b$

Вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала (a,b) находится по формуле: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют первую производную от функции распределения

$$f(x) = F'(x)$$

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a;b) равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

4. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.

Математическое ожидание.

$$M(X) = \int_a^b x \cdot f(X)dx \quad \text{или} \quad M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(X)dx$$

Дисперсия.

$$D(X) = \int_a^b (X - M(X))^2 \cdot f(X)dx \quad \text{или} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M(X))^2 \cdot f(X)dx$$

$$D(X) = \int_a^b X^2 \cdot f(X)dx - (M(X))^2 \quad \text{или} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} X^2 \cdot f(X)dx - (M(X))^2$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

3.34 Практическое занятие 34 (ПЗ-34): Нормальный закон распределения случайной величины.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Вероятность попадания нормально распределенной с. в. в заданный интервал.

Непрерывная случайная величина называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \text{ где } a = M(X), \sigma = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал находится по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где Ф(Х) - функция Лапласа, табличная.

Вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания по модулю не превышает заданного положительного числа δ, находится по формуле:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) \cdot$$

2. Правило «трёх сигм».

Практически достоверно, что при однократном испытании отклонение нормально распределенной случайной величины от ее математического ожидания не превышает утроенного среднего квадратического отклонения, т.е. значение любой нормально распределенной случайной величины расположены в интервале (а-3σ; а+3σ).

3.35 Практическое занятие 35 (ПЗ-35): Основы математической статистики.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Вариационные ряды, их характеристики и графическое изображение.

Будем проводить наблюдения интересующего признака X (случайная величина). Различные значения признака X называются вариантами (обозначение: x_i). Числа, показывающие сколько раз встречаются варианты, называются частотами (обозначение: n_i), а отношение их к общему числу наблюдений – относительными частотами (частостями), т.е. $w_i = \frac{n_i}{n}$.

Вариационные ряды бывают дискретными (варианты ряда отличаются на постоянную величину) и непрерывными или интервальными (варианты могут отличаться на сколь угодно малую величину).

Полигон представляет собой ломаную, в которой концы отрезков прямой имеют координаты $(x_i; n_i)$, $i = 1,2,...,n$.

Гистограмма (только для интервальных рядов) – ступенчатая фигура из прямоугольников с основаниями, равными интервалам значений признака и высотами, равными плотности частоты $r = \frac{n_i}{h}$, где h - шаг (длина интервалов).

2. Функция распределения.

Эмпирической функцией распределения $F_n(x)$ называется относительная частота (частость) того, что признак (случайная величина X) примет значение, меньшее заданного x, т.е.

$$F_n(x) = w(X < x) = w_x^{НАК}, \quad \text{где} \quad w_x^{НАК} = \frac{n_x^{НАК}}{n}.$$

Накопленная частота $n_x^{НАК}$ показывает, сколько наблюдалось вариантов со значением признака, меньшим x.

3. Числовые характеристики.

Среднее выборочное: $\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i$, где m – число неповторяющихся вариантов или число интервалов.

Выборочная дисперсия: $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x_B})^2 n_i$ или $D_B = \overline{x_B^2} - (\overline{x_B})^2$, $\overline{x_B^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i$.

Исправленная дисперсия: $s^2 = D_B \cdot \frac{n}{n-1}$.

Выборочное среднее квадратическое отклонение: $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Исправленное среднее квадратическое отклонение $s = \sigma_B \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$.

Коэффициент вариации: $v = \frac{s}{\overline{x_B}} \cdot 100\%$

Медианой M_e называется значение признака, приходящееся на середину вариационного ряда.

Модой M_o называется вариант, которому соответствует наибольшая частота.

3.36 Практическое занятие 36 (ПЗ-36): Основы теории выборочного метода.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Статистическое оценивание параметров, методы нахождения оценок.

Рассмотренные ранее оценки являются точечными. При малых объемах выборки такая оценка может сильно отличаться от оцениваемого параметра.

Доверительным интервалом для параметра θ с надежностью оценки γ называется числовой промежуток $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$, содержащий истинное значение данного параметра с вероятностью, равной γ. Здесь θ^* - оценка неизвестного параметра θ, $\delta > 0$ - некоторое число, надежность оценки γ обычно задается заранее и близко к единице.

2. Точность оценки, надежность, доверительный интервал.

Некоторые виды доверительных интервалов:

Для оценки математического ожидания a при известном среднем квадратическим отклонении σ:

$$\overline{x_B} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{x_B}$ – среднее выборочное; n – объем выборки; t находится из равенства $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ по таблице значений функции Лапласа.

Для оценки математического ожидания а при известном исправленном среднем квадратическим отклонении s:

$$\overline{x_B} - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{x_B}$ – среднее выборочное; п – объем выборки; t_γ находится по таблице при заданных п и γ.

Для оценки среднего квадратического отклонения σ:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad \text{при} \quad q < 1,$$

$$0 < \sigma < s(1+q) \quad \text{при} \quad q > 1,$$

где s – исправленное среднее квадратическое отклонение, q находится по таблице по n и γ.

3. Статистическая гипотеза и общая схема ее проверки.

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде неизвестного закона распределения или о величине параметров известных распределений.
Вероятность α допустить ошибку 1-го рода, т. е. отвергнуть правильную гипотезу H_0, называется уровнем значимости или «альфа – риском». Вероятность допустить ошибку 2-го рода, т. е. принять гипотезу H_0, когда она неверна, обычно обозначают β и называют «бета – риском».
Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы *о* предполагаемом законе неизвестного распределения. Имеется несколько критериев согласия. На практике наиболее часто используют критерий χ^2 (хи-квадрат) Пирсона, который применим к любым распределениям, в чём и состоит его достоинство.
4. Типы статистических критериев проверки гипотез.
В результате статистической проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов. Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза; вероятность совершить такую ошибку обозначают α и называют ее уровнем значимости. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза, вероятность которой обозначают β, а мощностью критерия является вероятность $1-\beta$.
Под критической областью понимают совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу H_0 отвергают. Критическую область при заданном уровне значимости следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной.
Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей. При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза, состоящая в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0 = D(X) = D(Y).$$

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину отношения большей исправленной дисперсии к меньшей

$$F = S_б^2 / S_м^2$$

Величина F имеет распределение Фишера-Снедекора, которое зависит только от чисел степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$.

Разработала: ________________________________ В.А. Ротова