ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Б1.Б.05 Математика

Специальность: 38.05.01 Экономическая безопасность
Специализация: Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности
Форма обучения: заочная

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1 Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1.	Элементы линейной и векторной алгебры				20	
1.1	Элементы линейной алгебры				10	
1.2	Элементы векторной алгебры				10	
2.	Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве				20	13
2.1	Элементы аналитической геометрии на плоскости				10	13
2.2	Элементы аналитической геометрии в пространстве				10	
3.	Основы математического анализа				30	
3.1	Числовая последовательность, ее предел				15	
3.2	Функция, ее предел				15	
4.	Основы математического анализа				30	10
4.1	Дифференциальное исчисление, его приложения				15	10
4.2	Функция двух переменных				15	
5.	Основы математического анализа				40	
5.1	Первообразная и неопределенный интеграл				15	
5.2	Определенный интеграл				15	
5.3	Несобственный				10	

	интеграл					
6.	Основы математического анализа				40	17
6.1	Дифференциальные уравнения				20	17
6.2	Дифференциальные уравнения второго порядка				20	
7.	Основы математического анализа				30	
7.1	Числовые ряды				15	
7.2	Степенные ряды				15	
8.	Основы теории вероятностей. Элементы математической статистики				40	10
8.1	Теория вероятностей				20	
8.2	Математическая статистика				20	10

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1. Определители. Матрицы. Собственные значения и собственные векторы матрицы Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Способы вычисления определителей: по определению, по теореме Лапласа, методом эффективного понижения порядка.
2. Использование свойств определителей для упрощения их вычисления.
3. Действия над матрицами, их свойства.
4. Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы.
5. Применение матриц в модели экономической торговли, модели Леонтьева многоотраслевой экономики.
6. Решение систем линейных уравнений: матричный метод решения, по формулам Крамера, методом Гаусса.
7. Исследование решения систем.
8. Особенности решения однородных систем линейных уравнений.

2.2 Векторы. Линейное пространство. Евклидово пространство

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Действия над векторами можно проводить в геометрической и координатной форме.
2. Признаки коллинеарности и компланарности векторов.
3. Скалярное произведение векторов, его приложения.
4. Проекция вектора на ось, ее свойства.
5. Векторное пространство векторов. Базис векторного пространства.
6. Разложение вектора по базису. Переход к новому базису.
7. Собственные векторы и собственные значения матриц.
8. Линейная модель обмена.

2.3. Линии второго порядка. Кривые спроса и предложения. Паутинная модель рынка

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Уравнение прямой линии на плоскости можно задать различными способами: с угловым коэффициентом, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом, проходящей через две данные точки, в отрезках, проходящей через данную точку с нормальным вектором, проходящей через данную точку с направляющим вектором.
2. Формула нахождения угла между двумя прямыми позволяет сформулировать условие параллельности и перпендикулярности прямых.
3. Общее уравнение прямой, его частные случаи позволяют упростить построение прямой на плоскости.
5. Линии второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.
6. Рассмотреть канонические уравнения линий второго порядка, провести его исследование.
7. Кривые спроса и предложения.
8. Паутинная модель рынка.

2.4. Плоскость и прямая в пространстве.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Определение и способы задания плоскости: по трем точкам, с точкой и нормальным вектором, в отрезках.
2. Общее уравнение плоскости, его частные случаи.
3. Уравнение прямой в пространстве, способы задания прямой: каноническое уравнение, через две точки, с точкой и направляющим вектором.
4. Плоскость и прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

2.5. Числовые последовательности. Задача о непрерывном начислении процентов

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Определение и основные понятия функции одной переменной.
2. Элементарные функции, их графики.
3. Сложная функция. Обратная функция.
4. Некоторые функциональные зависимости, используемые в экономике.
5. Кривые спроса и предложения. Равновесная цена.
6. Преобразование графиков. Интерполирование функций.
7. Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности.
8. Основные свойства сходящихся последовательностей
9. Задача о непрерывном начислении процентов.

2.6. Множества. Функциональная зависимость. Преобразование графиков. Интерполирование функций. Непрерывные функции. Асимптоты графика функции.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Предел функции в точке и на бесконечности. Теоремы о пределах функций.
2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
3. Раскрытие неопределенностей.
4. Два замечательных предела.
5. Эквивалентные бесконечно малые и их использование при вычислении пределов.
6. Левый и правый пределы функции.
7. Непрерывность функции в точке и на интервале.
8. Точки разрыва. Классификация точек разрыва.
9. Асимптоты графика функции: вертикальные, горизонтальные и наклонные.

2.7. Производная функции. Дифференциал функции. Предельные показатели в микроэкономике. Эластичность экономических показателей

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Производная функции, ее геометрический, механический и экономический смысл.
2. Правила дифференцирования.
3. Дифференцирование сложной и обратной функций.
4. Дифференцирование показательно - степенной функции.
5. Производная неявной функции.
6. Производные высших порядков.
7. Дифференциал функции, его геометрический смысл.
8. Приближенные вычисления с помощью дифференциала.
9. Применение дифференциального исчисления к исследованию функции: промежутки монотонности, точки экстремума, промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба.
10. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
11. Полное исследование функции, построение ее графика по пунктам исследования.
12. Предельные показатели в микроэкономике. Эластичность экономических показателей.

2.8. Билинейные и квадратичные формы. Функции нескольких переменных. Максимилизация прибыли

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Нахождение и построение области определения функции двух переменных.
2. Частные производные и дифференциалы функций нескольких переменных находятся при фиксировании переменных, по которым не ведется дифференцирование.
3. Производная по направлению, градиент, их геометрический смысл.
4. Экстремум функции нескольких переменных.
5. Применение функции двух переменных в экономике, функция Кобба-Дугласса.
6. Максимилизация прибыли.

2.9. Интегральное исчисление. Интегрирование рациональных дробей, рекурентная формула

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Понятие первообразной и неопределенного интеграла, основные свойства.
2. Знать и уметь применять таблицу основных интегралов.
3. Знать и уметь применять методы интегрирования: непосредственное интегрирование, замена переменной, интегрирование по частям.
4. Определение рациональной функции, виды простейших рациональных дробей и их интегрирование.
5. Разложение рациональной функции на сумму простейших рациональных дробей.

2.10. Определенный интеграл. Приложения определенного интеграла. Использование определенного интеграла в экономике

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Понятие определенного интеграла, его основные свойства. Формула Ньютона – Лейбница.
2. Геометрический и экономический смысл определенного интеграла.
3. Площадь фигур на плоскости. Нахождение объема тела вращения.
4. Методы интегрирования в определенном интеграле.

2.11. Несобственные интегралы

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:

1. Понятие несобственного интеграла.

2. Несобственные интегралы первого рода.
3. Несобственные интегралы первого рода.

2.12. Дифференциальные уравнения первого порядка. Элементы качественного анализа дифференциальных уравнений.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие общего и частного решения. Решение задачи Коши.
2. Понятие и способ решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
3. Понятие и способ решения линейных дифференциальных уравнений, уравнений Бернулли методом Бернулли.
4. Понятие и способ решения однородных дифференциальных уравнений.
5. Понятие и способ решения разностных дифференциальных уравнений.

2.13. Дифференциальные уравнения высших порядков. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Определение и способ решения ЛОДУ второго порядка.
2. Определение комплексных чисел.
3. Действия над комплексными числами в алгебраической форме.
4. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.
5. Определение и способ решения ЛНДУ второго порядка.

2.14. Знакоположительные ряды. Знакочередующиеся ряды. Признаки сходимости рядов

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие числового знакоположительного ряда, свойства рядов.
2. Признаки сходимости знакоположительных рядов.
5. Эталонные ряды.
6. Понятие знакочередующегося ряда.
7. Признак Лейбница.
8. Абсолютная и условная сходимость.

2.15. Степенные ряды. Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие степенного ряда.
2. Определение радиуса и интервала сходимости степенного ряда.
3. Определение и способ разложения функций в ряд Тейлора и Маклорена.
4. Применение рядов в приближенных вычислениях.

2.16. Основы теории вероятностей. Вероятность события при повторных испытаниях. Случайные величины. Нормальный закон распределения случайной величины

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Сущность и условия применения теории вероятностей.
2. Классическое и статистическое определения вероятности.
3. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Вероятность события при повторных испытаниях: формула Бернулли, локальная теорема Лапласа, интегральная теорема Лапласа, теорема Пуассона.
6. Наивероятнейшее число наступлений события при повторении испытаний.
7. Понятие случайной величины.

8. Дискретные случайные величины. Закон распределения вероятностей дискретной с.в., числовые характеристики дискретной случайной величины.
9. Непрерывные случайные величины. Функция распределения и её свойства. Плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины. Числовые характеристики непрерывной случайной величины.
10. Определение нормального закона распределения случайной величины.
11. Вероятность попадания нормально распределенной с. в. в заданный интервал.
12.Правило «трёх сигм».

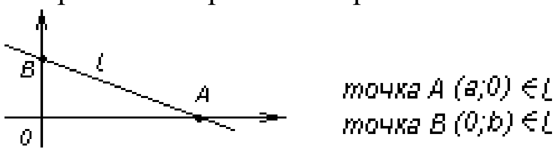
2.17. Основы математической статистики. Элементы математической статистики в экономике. Основы теории выборочного метода

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности:
1. Понятие вариационных рядов, их характеристики и графическое изображение.
2. Понятие генеральной совокупности и выборки.
3. Определение и способ нахождения функции распределения.
4. Числовые характеристики вариационных рядов.
5. Основы теории выборочного метода: статистическое оценивание параметров, методы нахождения оценок.
6. Понятие точности оценки, надежности, доверительного интервала, некоторые виды доверительных интервалов.
7. Понятие статистической гипотезы и общая схема ее проверки.
8. Типы статистических критериев проверки гипотез.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практическое занятие 1 (ПЗ-1): Элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:
1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
Угловым коэффициентом *k* прямой l называется тангенс угла наклона между прямой и положительным направлением оси X.
$y = kx + b$ **-** уравнение прямой с угловым коэффициентом *k.*
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
Пусть прямая l проходит через точку $M_1(x_1; y_1)$.
$y - y_1 = k(x - x_1)$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку с угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
Пусть $M_1(x_1; y_1) \in l$ и $M_2(x_2; y_2) \in l$.
$k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ - формула углового коэффициента прямой, проходящей через две данные точки.
$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
4. Уравнение прямой в отрезках.



$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ - уравнение прямой в отрезках.

5. Угол между двумя прямыми.

Дано: $\begin{matrix} l_1: \quad y = k_1x + b_1 \\ l_2: \ y = k_2x + b_2 \end{matrix}$

$tg\varphi == \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$ - угол между двумя прямыми.

Углом между двумя прямыми называется угол поворота одной прямой по отношению к другой против хода часовой стрелки.

6. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.

Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны. $k_1 = k_2$

Обратное утверждение тоже справедливо.

Если прямые перпендикулярны, то произведение их угловых коэффициентов равно -1. $k_1k_2 = -1$

Если прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты обратны по величине и противоположны по знаку.

Обратное утверждение тоже справедливо.

7. Общее уравнение прямой, его частные случаи.

В ПДСК любая прямая задается уравнением первой степени $\boxed{Ax + By + C = 0}$, где $A \neq 0$ или $B \neq 0$.

Обратное утверждение тоже верно, т.е. данное уравнение при произвольных коэффициентах *A, B и C* ($A \neq 0$ или $B \neq 0$) определяет некоторую прямую в ПДСК.

Чтобы найти точку пересечения прямых l_1 *и* l_2 нужно решить систему, составленную из уравнений этих прямых.

$$\begin{matrix} l_1: \\ l_2: \end{matrix} \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

8. Расстояние от точки до прямой.

Вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к прямой l, называется нормальным вектором прямой l.

$l: Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n} = (A; B)$.

$\boxed{d(M_0; l) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$ - расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$

9. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.

$\vec{n} = (A; B)$ - нормальный вектор прямой и $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит прямой.

Тогда $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку с нормальным вектором.

4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

$\vec{p} = (\alpha; \beta)$ - направляющий вектор прямой и $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит прямой.

Тогда $\dfrac{x - x_0}{\alpha} = \dfrac{y - y_0}{\beta}$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку с направляющим вектором.

3.2 Практическое занятие 2 (ПЗ-2): Дифференциальное исчисление, его приложения.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Возрастание и убывание графика функции.

Функция называется возрастающей, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция называется убывающей, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.
ТЕОРЕМА (признак монотонности): Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и внутри интервала $f'(x) > 0$ $[\ f'(x) < 0\ ]$, то график функции $y = f(x)$ возрастает [убывает] на интервале $(a;b)$.
Функция $y = f(x)$ имеет максимум [минимум] в точке x_0, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек, отличных от x_0 и принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $[\ f(x) > f(x_0)\ ]$.
ТЕОРЕМА (необходимое условие экстремума): Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то производная функции в этой точке равна нулю или не существует.
ТЕОРЕМА (достаточное условие экстремума): Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема во всех точках своей области определения, и точка x_0 принадлежит области определения. Если производная $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку x_0 меняет знак с «+» на «-», то x_0 - точка максимума, если с «-» на «+», то x_0 - точка минимума, а если производная знака не меняет, то в точке x_0 экстремума нет.
2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.
Рассмотрим функцию $y = f(x)$ непрерывную на отрезке $[a;b]$.
План нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$
- Находим область определения функции. Проверяем, принадлежит ли отрезок $[a;b]$ области определения.
- Находим точки экстремума функции и выбираем те из них, которые принадлежат отрезку $[a;b]$.
- Находим значения функции на концах отрезка ($f(a)$ $и$ $f(b)$) и значения функции в точках экстремума.
- Выбираем из всех полученных значений наибольшее и наименьшее.
3. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точка перегиба.
График дифференцируемой функции называется выпуклым [вогнутым] в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже [выше] любой своей касательной в этом интервале.
ТЕОРЕМА: Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную во всех точках интервала $(a;b)$ и если во всех точках этого интервала $f''(x) > 0$, то график функции вогнутый в интервале $(a;b)$, если же $f''(x) < 0$, то график функции выпуклый в интервале $(a;b)$.
ТЕОРЕМА (необходимое условие точки перегиба): Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, то вторая производная в этой точке равна нулю или не существует.
ТЕОРЕМА (достаточное условие точки перегиба): Пусть x_0 - стационарная точка. Если, проходя через стационарную точку, вторая производная меняет знак, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.
4. Алгоритм исследования функции.
- Найти область определения функции D_y.
- Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва функции, определить их род.
- Найти асимптоты графика функции.

- Если возможно, найти пересечение графика функции с осями координат. Если отыскание точек пересечения затруднительно, то посмотреть координаты по графику (приблизительно).

- Исследовать функцию на четность / нечетность.

- Определить интервалы монотонности и точки экстремума функции.

- Определить интервалы выпуклости и вогнутости, найти точки перегиба графика функции.

- Построение по пунктам исследования (построение графика принято начинать с построения асимптот).

- Определить множество значений функции E_y.

5. Исследование функции. Построение графика.

Исследовать функцию и построить графики нескольких функций по данному плану.

3.3 Практическое занятие 3 (ПЗ-3): Дифференциальные уравнения.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Дифференциальные уравнения с разделенными и разделяющимися переменными.

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции.

Общим решением дифференциального уравнения называется такая дифференцируемая функция y=φ(x,C), которая при подстановке в исходное уравнение вместо неизвестной функции обращает уравнение в тождество.

Решение вида $y=\varphi(x,C_0)$ называется частным решением дифференциального уравнения.

Задачей Коши называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y=\varphi(x,C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

Дифференциальное уравнение вида: $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$, где $M_1(x), M_2(x)$ - функции от x, $N_1(y), N_2(y)$ - функции от y, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Такие уравнения решаются разделением переменных и последующем интегрировании:

$$\int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = -\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными. После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

2. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ - функции от x или постоянные числа.

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где $p(x)$ и $q(x)$ – функции от x, n – постоянное число, $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Одним из методов решения таких уравнений является метод Бернулли.

Решение уравнения ищут в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x), v(x)$ - неизвестные функции от x.

Учитывая, что $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, переходим к системе:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = q(x) \end{cases}.$$

Решив систему, находим функции $u(x), v(x)$ и общее решение уравнения $y = u(x) \cdot v(x)$.

3. Линейные дифференциальные уравнения. Уравнения Бернулли. Метод Бернулли.

Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ - функции от x или постоянные числа.

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^n$, где $p(x)$ и $q(x)$ – функции от x, n – постоянное число, $n \neq 0$, $n \neq 1$.

Одним из методов решения таких уравнений является метод Бернулли.
Решение уравнения ищут в виде $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x), v(x)$ - неизвестные функции от x.
Учитывая, что $y = uv, \;\; y' = u'v + uv'$, переходим к системе:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = q(x) \end{cases}.$$

Решив систему, находим функции $u(x), v(x)$ и общее решение уравнения $y = u(x) \cdot v(x)$.
4. Однородные дифференциальные уравнения.
Дифференциальное уравнение $y' = f(x; y)$ называется однородным 1-го_порядка, если функция $f(x; y)$ удовлетворяет условию: $f(tx, ty) = f(x, y)$, где t - произвольный параметр.
Однородные дифференциальные уравнения решаются подстановкой:

$z = \dfrac{y}{x}$, откуда $y = xz$, $y' = z'x + zx' = z'x + z$,

где z - функция от x. В результате подстановки, получаем уравнение с разделяющимися переменными $z'x + z = f(x; zx)$, решив которое, делаем обратную подстановку (возвращаемся к функции y).
5. Разностные уравнения.
Обыкновенным разностным уравнением называется уравнение, связывающее значения одного независимого аргумента x, его функции Y_x и разностей различных порядков этой функции DY_x, D^2Y_x, D^3Y_x,.... Такое уравнение можно записать в общем виде следующим образом:

$$j(x, Y_x, DY_x, D^2Y_x\ D^3Y_x, D^nY_x) = 0,$$

которое по форме аналогично дифференциальному уравнению.
Порядком разностного уравнения называется порядок наивысшей разности, входящей в это уравнение. Разностное уравнение (1) часто удобнее записать, пользуясь не разностями неизвестной функции, а ее значениями при последовательных значениях аргумента, то есть выразить DY_x, D^2Y_x, D^3Y_x,... через Y_x, Y_{x+1}, Y_{x+2},.... Уравнение можно привести к одной из двух форм:

$$y(x, Y_x, Y_{x+1},...,Y_{x+n}) = 0,$$
$$x(x, Y_x, Y_{x-1},...,Y_{x-n}) = 0.$$

Общее дискретное решение Y_x обыкновенного разностного уравнения *n*-го порядка представляет функцию x (x = 0, 1. 2,...), содержащую ровно *n* произвольных постоянных:

$$Y_x = Y(x, C_1, C_2,..., C_n).$$

Примером служит паутинообразная модель рынка.
6. ЛОДУ второго порядка.
Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) 2 пор. с постоянными коэффициентами называется уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$, где p и q - действительные числа.
Обозначим $y''k^2, y' = k, y = k^0 = 1$. Получим характеристическое уравнение: $k^2 + pk + q = 0$.
Общее решение ЛОДУ будет зависеть от корней характеристического уравнения $k_1 \; и \; k_2$ следующим образом:
1) $D > 0$, $k_1 \neq k_2$, то $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, где $C_1 \; и \; C_2$ - постоянные;
2) $D = 0$, $k_1 = k_2$, то $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}$, где $C_1 \; и \; C_2$ - постоянные;
3) $D < 0$, $k_{1/2} = \alpha \pm \beta i$, то $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, где $\alpha, \beta, C_1 \; и \; C_2$ - постоянные.
7. ЛНДУ второго порядка.

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) 2 пор. с постоянными коэффициентами называется уравнение вида: $y'' + py' + qy = f(x)$, где $f(x)$ - функция от x, p и q – действительные числа.

Общее решение данного ЛНДУ есть сумма y_0 - общего решения соответствующего ЛОДУ и y_* - частного решения данного ЛНДУ: $y = y_0 + y_*$.

Правая часть уравнения имеет вид: $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x\right]$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены степени m_1 и m_2 соответственно.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$y_* = x^r e^{\alpha x}\left[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x\right]$,

где число r показывает сколько раз число $\alpha + \beta i$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего ЛОДУ, а $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ – многочлены степени m, где m - большая из степеней m_1 и m_2.

3.4 Практическое занятие 4 (ПЗ-4): Математическая статистика.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на следующие моменты:

1. Вариационные ряды, их характеристики и графическое изображение.

Будем проводить наблюдения интересующего признака X (случайная величина). Различные значения признака X называются вариантами (обозначение: x_i). Числа, показывающие сколько раз встречаются варианты, называются частотами (обозначение: n_i), а отношение их к общему числу наблюдений – относительными частотами (частостями), т.е. $w_i = \frac{n_i}{n}$.

Вариационные ряды бывают дискретными (варианты ряда отличаются на постоянную величину) и непрерывными или интервальными (варианты могут отличаться на сколь угодно малую величину).

Полигон представляет собой ломаную, в которой концы отрезков прямой имеют координаты $(x_i; n_i)$, $i = 1,2,...,n$.

Гистограмма (только для интервальных рядов) – ступенчатая фигура из прямоугольников с основаниями, равными интервалам значений признака и высотами, равными плотности частоты $r = \frac{n_i}{h}$, где h - шаг (длина интервалов).

2. Функция распределения.

Эмпирической функцией распределения $F_n(x)$ называется относительная частота (частость) того, что признак (случайная величина X) примет значение, меньшее заданного x, т.е.

$$F_n(x) = w(X < x) = w_x^{НАК}, \quad \text{где} \quad w_x^{НАК} = \frac{n_x^{НАК}}{n}.$$

Накопленная частота $n_x^{НАК}$ показывает, сколько наблюдалось вариантов со значением признака, меньшим x.

3. Числовые характеристики.

Среднее выборочное: $\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i$, где m – число неповторяющихся вариантов или число интервалов.

Выборочная дисперсия: $D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \overline{x_B})^2 n_i$ или $D_B = \overline{x_B^2} - (\overline{x_B})^2$, $\overline{x_B^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^2 n_i$.

Исправленная дисперсия: $s^2 = D_B \cdot \frac{n}{n-1}$.

Выборочное среднее квадратическое отклонение: $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Исправленное среднее квадратическое отклонение $s = \sigma_B \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}$.

Коэффициент вариации: $v = \frac{s}{\overline{x_B}} \cdot 100\%$

Медианой M_e называется значение признака, приходящееся на середину вариационного ряда.

Модой M_0 называется вариант, которому соответствует наибольшая частота.

4. Статистическое оценивание параметров, методы нахождения оценок.

Рассмотренные ранее оценки являются точечными. При малых объемах выборки такая оценка может сильно отличаться от оцениваемого параметра.

Доверительным интервалом для параметра θ с надежностью оценки γ называется числовой промежуток $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$, содержащий истинное значение данного параметра с вероятностью, равной γ. Здесь θ^* - оценка неизвестного параметра θ, $\delta > 0$ - некоторое число, надежность оценки γ обычно задается заранее и близко к единице.

5. Точность оценки, надежность, доверительный интервал.

Некоторые виды доверительных интервалов:

Для оценки математического ожидания a при известном среднем квадратическим отклонении σ:

$$\overline{x_B} - \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{x_B}$ – среднее выборочное; n – объем выборки; t находится из равенства $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ по таблице значений функции Лапласа.

Для оценки математического ожидания а при известном исправленном среднем квадратическим отклонении s:

$$\overline{x_B} - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_B} + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{x_B}$ – среднее выборочное; п – объем выборки; t_γ находится по таблице при заданных п и γ.

Для оценки среднего квадратического отклонения σ:

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad \text{при} \quad q < 1,$$

$$0 < \sigma < s(1+q) \quad \text{при} \quad q > 1,$$

где s – исправленное среднее квадратическое отклонение, q находится по таблице по n и γ.

6. Статистическая гипотеза и общая схема ее проверки.

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде неизвестного закона распределения или о величине параметров известных распределений.

Вероятность α допустить ошибку 1-го рода, т. е. отвергнуть правильную гипотезу H_0, называется уровнем значимости или «альфа – риском». Вероятность допустить ошибку 2-го рода, т. е. принять гипотезу H_0, когда она неверна, обычно обозначают β и называют «бета – риском».

Критерием согласия называют статистический критерий проверки гипотезы *о* предполагаемом законе неизвестного распределения. Имеется несколько критериев согласия. На практике наиболее часто используют критерий χ^2 (хи-квадрат) Пирсона, который применим к любым распределениям, в чём и состоит его достоинство.

7. Типы статистических критериев проверки гипотез.

В результате статистической проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов. Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная гипотеза; вероятность совершить такую ошибку обозначают α и называют ее уровнем значимости. Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная гипотеза, вероятность которой обозначают β, а мощностью критерия является вероятность $1-\beta$.

Под критической областью понимают совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу H_0 отвергают. Критическую область при заданном уровне значимости следует строить так, чтобы мощность критерия была максимальной.

Сравнение двух дисперсий нормальных генеральных совокупностей. При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза, состоящая в том, что генеральные дисперсии рассматриваемых совокупностей равны между собой:

$$H_0 = D(X) = D(Y).$$

В качестве критерия проверки нулевой гипотезы принимают случайную величину отношения большей исправленной дисперсии к меньшей

$$F = S_б^2 / S_м^2$$

Величина F имеет распределение Фишера-Снедекора, которое зависит только от чисел степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$.

Разработала: __________________________________ В.А. Ротова