ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Б1.Б.05 Математика для экономистов

Специальность 38.05.01 Экономическая безопасность

Специализация Экономико-правовое обеспечение экономической безопасности

Форма обучения очная

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	**Тема 1** Элементы линейной алгебры и их применение для решения экономических задач				8	12
2	**Тема 2** Функция одной и нескольких переменных				16	20
3	**Тема 3** Ряды и дифференциальные уравнения				10	4
	Итого:				34	36

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

2.1. Модель Леонтьева – модель многоотраслевой экономики

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.
Рассмотрим модель международной торговли (модель обмена) в виде математической модели.
Пусть имеем n стран - $S_1, S_2, ..., S_n$, национальный доход каждой из которых равен $x_1, x_2, ..., x_n$.
Обозначим через a_{ij} , $i = 1...n;\ j = 1...n$ долю национального дохода, который страна S_j тратит на покупку товаров у страны S_i .
Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран, т.е. $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad (j = 1...n)$.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется <u>*структурной матрицей торговли*</u>.

Обозначим через $p_i \quad (i = 1...n)$ выручку от внутренней и внешней торговли для страны S_i , тогда $p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n$.

Очевидно, что выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше её национального дохода, т.е. $p_i \ge x_i$. Но $p_i > x_i$ - невозможный случай, т.к. все страны не могут одновременно получать прибыль, поэтому условие $p_i \ge x_i$ примет вид $p_i = x_i$.

Введем вектор национальных доходов страны $\vec{x} = (x_1; x_2; ...; x_n)$, получим матричное уравнение

$A \cdot X = X$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы А, отвечающего собственному значению λ =1.

<u>Пример:</u> Структурная матрица торговли трех стран S_1, S_2, S_3 имеет вид $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

Найти национальные доходы для сбалансированной торговли.

Решение: Найдем собственный вектор $\vec{x}$, соответствующий собственному значению λ =1.

$(A - E)X = 0 \quad \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = 1{,}5c \\ x_2 = 2c \\ x_3 = c \end{cases}$ - метод Гаусса. Т.е.

$\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$

Таким образом, сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $\vec{x} = (1{,}5c; 2c; c)$, т.е. при соотношении национальных доходов стран $\frac{3}{2} : 2 : 1$ или $3 : 4 : 2$.

Цель балансового анализа – ответить на вопрос, возникающий в макроэкономике и связанный с эффективностью ведения многоотраслевого хозяйства: каким должен быть объем производства каждой из отраслей, чтобы удовлетворить все потребности в продукции этой отрасли. При этом каждая отрасль выступает, с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой – как потребитель продукции и своей, и произведенной другими отраслями. Математическая модель Леонтьева позволяет анализировать связь между отраслями.

Задача. В таблице приведены данные об использовании стоимостного баланса за отчетный период, усл. ден. ед.:

№ п/п	Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовый продукт
		Q_1	Q_2		
1	Q_1	3	8	89	100
2	Q_2	5	7	88	100

Требуется:

1) составить матрицу прямых затрат и проверить ее продуктивность;
2) вычислить объемы конечного продукта при увеличении валового выпуска каждой отрасли соответственно на 100% и 50%;
3) Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если конечное потребление отрасли Q_1 увеличить в k =1 раз, а отрасли Q_2 – на 10%.

Решение: 1. Введем в рассмотрение матрицу $X = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ и векторы $\vec{y} = \begin{pmatrix} 89 \\ 88 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$.

Составим матрицу прямых затрат *А*, учитывая, что ее элементы $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$: $A = \begin{pmatrix} 0{,}03 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}07 \end{pmatrix}$.

Легко видеть, что сумма элементов столбцов (строк) *А* меньше единицы. Следовательно, в силу второго критерия продуктивности (матрица продуктивна, если максимум сумм элементов её столбцов не превосходит единицы) матрица *А* продуктивна.

2. Уравнение линейного межотраслевого баланса имеет вид: $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$.

При увеличении валового выпуска отраслей Q_1 и Q_2 соответственно на 100% и 50% получим новый вектор валового выпуска $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix}$.

Вектор потребления $\vec{y}_1$, соответствующий вектору $\vec{x}_1$, найдем из уравнения баланса:

$$\vec{y}_1 = (E - A)\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 182 \\ 129{,}5 \end{pmatrix}.$$

Изменения объемов конечного продукта Q_1 на 182 – 89 = 93 ед. или 104,5%, Q_2 – на 129,5 – 98 = 41,5 ед. на 47,2%.

3. Конечное потребление отрасли Q_1 остается без изменения, а отрасли Q_2 станет равным Получим новый вектор потребления

$$\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 89 \\ 96{,}8 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор валового выпуска $\vec{x}_2$ найдем из уравнения баланса

$$\vec{x}_2 = (E - A)^{-1} \vec{y}_2.$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}97 & -0{,}08 \\ -0{,}05 & 0{,}93 \end{pmatrix}; \quad \textit{Определитель} \quad |E - A| = 0{,}8981.$$

Обратная матрица $(E - A)^{-1} = 0{,}8981 \begin{pmatrix} 0{,}93 & 0{,}08 \\ 0{,}05 & 0{,}97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}03 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 1{,}08 \end{pmatrix}.$

Откуда $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1{,}03 & 0{,}09 \\ 0{,}06 & 1{,}08 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 89 \\ 96{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100{,}38 \\ 109{,}88 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0{,}09 \\ 6 & 1{,}08 \end{pmatrix}.$

Валовый продукт отраслей необходимо увеличить Q_1 на 0,38%, Q_2 – на 9,88%.

Продуктивные модели Леонтьева.

ТЕОРЕМА Если для матрицы А с неотрицательными элементами и некоторого вектора $\bar{y}$ с неотрицательными компонентами уравнение $\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}$. (16.6) имеет решение $\bar{x}$ с неотрицательными компонентами, то матрица А продуктивна.

Иными словами, достаточно установить наличие положительного решения системы (16.6) хотя бы для одного положительного вектора $\bar{y}$, чтобы матрица А была продуктивной. Перепишем систему (16.6) с использованием единичной матрицы Е в виде $(E - A)\bar{x} = \bar{y}$. (16.7)

Если существует обратная матрица (Е - А)-1 , то существует и единственное решение уравнения (16.7): $\bar{x} = (E - A)^{-1}\bar{y}$. (16.8)

Матрица (Е — А)-1 называется матрицей полных затрат.

Существует несколько критериев продуктивности матрицы А. Приведем два из них.

Первый критерий продуктивности. Матрица А продуктивна тогда и только тогда, когда матрица (Е - А)-1 существует и ее элементы неотрицательны.

Второй критерий продуктивности. Матрица А с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant 1,$

причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Рассмотрим применение модели Леонтьева на несложных примерах.

Пример 1. В табл. 16.4 приведены данные по балансу за некоторый период времени между пятью отраслями промышленности. Найти векторы конечного потребления и валового выпуска, а также матрицу коэффициентов прямых затрат и определить, является ли она продуктивной в соответствии с приведенными выше критериями.

Таблица 16.4

№ п/п	Отрасль	Потребление					Конечный продукт	Валовой выпуск, ден. ед.
		1	2	3	4	5		
1	Станкостроение	15	12	24	23	16	10	100
2	Энергетика	10	3	35	15	7	30	100
3	Машиностроение	10	5	10	10	10	5	50
4	Автомобильная промышленность	10	5	10	5	5	15	50
5	Добыча и переработка углеводородов	7	15	15	10	3	50	100

Решение. В данной таблице приведены составляющие баланса в соответствии с соотношениями (16.2): xij — первые пять столбцов, yi — шестой столбец, xi — последний столбец (i,j = 1, 2, 3, 4, 5). Согласно формулам (16.3) и (16.4), имеем

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 5 \\ 15 \\ 50 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}15 & 0{,}12 & 0{,}48 & 0{,}46 & 0{,}16 \\ 0{,}10 & 0{,}03 & 0{,}70 & 0{,}30 & 0{,}07 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}10 & 0{,}05 & 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}05 \\ 0{,}07 & 0{,}15 & 0{,}30 & 0{,}20 & 0{,}03 \end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы А положительны, однако нетрудно видеть, что их сумма в третьем и четвертом столбцах больше единицы. Следовательно, условия второго критерия продуктивности не соблюдены и матрица А не является продуктивной. Экономическая причина этой непродуктивности заключается в том, что внутреннее потребление отраслей 3 и 4 слишком велико в соотношении с их валовыми выпусками.

Пример 2. Табл. 16.5 содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 60, 70 и 30 условных денежных единиц.

Таблица 16.5

№ п/п	Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
		1	2	3		
1	Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
2	Энергетика	10	10	20	60	100
3	Машиностроение	20	10	10	10	50

Решение. Выпишем векторы валового выпуска и конечного потребления и матрицу коэффициентов прямых затрат. Согласно формулам (16.3) и (16.4), имеем

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix}.$$

Матрица А удовлетворяет обоим критериям продуктивности. В случае заданного увеличения конечного потребления новый вектор конечного продукта будет иметь вид

$$\bar{y}_* = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}. \qquad (16.9)$$

Требуется найти новый вектор валового выпуска $\bar{x}$ *, удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица А не изменяется. В таком случае компоненты x1, x2, x3 неизвестного вектора $\bar{x}$ * находятся из системы уравнений, которая согласно (16.4) имеет в данном случае вид

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}05x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}4x_3 + 60, \\ x_2 = 0{,}1x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}4x_3 + 70, \\ x_3 = 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}2x_3 + 30. \end{cases}$$

В матричной форме эта система выглядит следующим образом: $\bar{x}_* = A\bar{x}_* + \bar{y}_*,$ (16.10)

Или $(E-A)\bar{x}_* = \bar{y}_*,$ (16.11)

где матрица (Е — А) имеет вид

$$(E-A) = \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}35 & -0{,}40 \\ -0{,}10 & 0{,}90 & -0{,}40 \\ -0{,}20 & -0{,}10 & 0{,}80 \end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных уравнений (16.11) при заданном векторе правой части (16.9) (например, методом Гаусса) дает новый вектор $\bar{x}$ * как решение системы уравнений баланса (16.10):

$$\bar{x}_* = \begin{pmatrix} 152{,}6 \\ 135{,}8 \\ 92{,}5 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для того чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,2%, уровень энергетики — на 35,8% и выпуск продукции машиностроения — на 85% по сравнению с исходными величинами, указанными в табл.

Теорема. (критерий продуктивности). *Матрица* $\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$ *продуктивна тогда и только тогда, когда матрица* $\mathbf{S} = (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ *существует и является неотрицательной.*

Экономический смысл элементов матрицы $\mathbf{S} = (s_{ik})$ заключается в следующем: элемент s_{ik} равен количеству продукции, которое должен выпустить объект P_i, для того чтобы объект P_k мог выпустить одну единицу конечной продукции (а не полного выпуска). В связи с этим элементы s_{ik} носят название **коэффициентов полных затрат**, а матрица **S** – **матрицы коэффициентов полных затрат**.

Приведем еще один достаточный признак продуктивности модели Леонтьева, наиболее удобный для проверки продуктивности матрицы межотраслевого баланса в натурально-стоимостной форме.

Теорема *Если матрица* **A** = (a_{ij}) *неотрицательна, сумма элементов каждой строки не больше единицы и хотя бы для одной строки строго меньше единицы, то модель Леонтьева, определяемая матрицей* ***A****, продуктивна.*

Таким образом, матрица **A** продуктивна, если $a_{ij} \geq 0$ для любых *i*, *j* = 1, 2, …, *n*, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ (*i* = 1, 2, …, *n*) и существует номер i_0 такой, что $\sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} < 1$.

Очевидно, что коэффициенты s_{ij} полных затрат всегда меньше, а могут быть и существенно больше соответствующих коэффициентов a_{ij} прямых затрат, поскольку, во-первых, коэффициенты s_{ij} указывают не только непосредственные поставки продукции объекта P_i объекту P_j, но и поставки продукции объекта P_i другим объектам, для того чтобы последние в свою очередь могли поставить объекту P_j требуемое количество их продукции, и во-вторых, при вычислении коэффициентов s_{ij} берется отношение суммы поставок продукции объекта P_i всем объектам к величине конечной продукции объекта P_j, а эта величина меньше полного выпуска продукции объекта P_j

2.2 Формула сложных процентов.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

Капитализация процентов — причисление процентов к сумме вклада, позволяет в дальнейшем осуществлять начисление процентов на проценты. Начисление процентов на проценты, используемое в некоторых видах банковских вкладов, или при наличии долга проценты, которые включаются в сумму основного долга, и на них также начисляются проценты. То же, что и сложный процент. Проценты по вкладу с капитализацией могут начисляться ежедневно, ежемесячно, ежеквартально и ежегодно. Если их не выплачивают, то прибавляют к сумме вклада. И в следующем периоде проценты будут начислены уже на большую сумму.

Общая сумма, которую получит вкладчик, при расчёте по сложному проценту будет равна $x \cdot (1+a)^n$, где x — начальная сумма вложенных средств, 0 < a < 1 — годовая процентная ставка, n — срок вклада в годах. При вкладе по ставке s% годовых, после первого года хранения капитал составил бы x плюс s% от неё, то есть возрос бы в $(1 + s/100)$ раза. На второй год s% рассчитывались бы уже не от одной копейки, а от величины, большей её в (1 + s/100) раза. И, в свою очередь, данная величина увеличилась бы тоже за год в (1 + s/100) раза. Значит, по сравнению с первичной суммой вклад за два года возрос бы в $(1+s/100)^2$ раз. За три года — в $(1+s/100)^3$ раз.

К году N первичный вклад вырос бы до величины в $(1+s/100)^N$ раз больше первоначальной.

В применении к ежемесячной капитализации формула сложного процента имеет вид:

$$x\cdot(1+(1+s/100)^{1/12}-1)^m = x\cdot(1+s/100)^{m/12},$$

где x — начальная сумма вклада, s — годовая ставка в процентах, m — срок вклада в месяцах.

2.3. Формула непрерывных процентов.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

При многократном начислении *простых процентов* начисление делается по отношению к исходной сумме ипредставляет собой каждый раз одну и ту же величину. Иначе говоря,

$$S = P + P\cdot n\cdot i = (1+ni)P,$$

где P — исходная сумма

- S — наращенная сумма (исходная сумма вместе с начисленными процентами)
- i — процентная ставка, выраженная в долях
- n — число периодов начисления

В этом случае говорят о ***простой процентной ставке***.

При многократном начислении *сложных процентов* начисление каждый раз делается по отношени ю к суммес уже начисленными ранее процентами. Иначе говоря,

$$S = (1+i)^n P$$

(при тех же обозначениях).

В этом случае говорят о ***сложной процентной ставке***.

Часто рассматривается следующая ситуация. Годовая процентная ставка составляет j, а процентына числяются m раз в году по сложной процентной ставке равной j / m (например, поквартально, тогда m = 4или ежемесячно, тогда m = 12). Тогда формула для наращенной суммы будет выглядеть:

$$S = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm} P$$

В этом случае говорят о ***номинальной процентной ставке***. Сравнение сложных процентных ставок с разными интервалами начисления производят при помощи показателя <u>годовая процентная доходность</u>.

Наконец, иногда рассматривают ситуацию так называемых ***непрерывно начисляемых процентов***, т о естьгодовое число периодов начисления m устремляют к бесконечности. Процентную ставку обоз начают δ, аформула для наращенной суммы: $S = e^{\delta n}P$.

В этом случае номинальную процентную ставку δ называют ***сила роста***.

Наращение и дисконтирование. Наращенная сумма в случае непрерывного начисления процентов по ставке ***j***: $\boldsymbol{S = Pe^{jn}}$

Для того чтобы отличать ставку непрерывных процентов от ставок дискретных процентов, ее называют ***силой роста*** и обозначают символом $\boldsymbol{\delta}$. С учетом введенного обозначения равенство (4.1) принимает вид $\boldsymbol{S = Pe^{\delta n}}$ Сила роста представляет собой номинальную ставку процентов при $\boldsymbol{m}\to\infty$.

Задача Сила роста банковского вклада $\delta=0{,}03$. Найти сумму на счете через 2 года, если первоначальная сумма вклада составляет 9000 руб.

Р е ш е н и е. $S = 9000e^{0{,}03*2} = 9000e^{0{,}06} = 9556{,}38$ руб.

Дисконтирование на основе непрерывных процентных ставок осуществляется по формуле $\boldsymbol{P=Se^{-\delta n}}$

Связь дискретных и непрерывных процентных ставок. Дискретные и непрерывные процентные ставки находятся в функциональной зависимости, благодаря которой можно осуществлять переход от расчета непрерывных процентов к дискретным и наоборот. Формулу эквивалентного перехода от одних ставок к другим можно получить, приравнивая соответствующие множители наращения $\boldsymbol{(1+i)^n = e^{\delta n}}$ (Из записанного равенства следует, что $\boldsymbol{\delta = \ln(1+i)}$, откуда $\boldsymbol{i = e^{\delta} - 1}$

Задача. Годовая ставка сложных процентов равна 15%. Чему равна эквивалентная сила роста?

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой: $\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0{,}15) = 0{,}13976$, т.е. эквивалентная сила роста равна 13,976%.

2.4. Производственная функция и функция полезности.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности. Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

Наиболее часто используются в экономике следующие функции:

1. *Функция полезности (функция предпочтений)* – в широком смысле зависимость полезности, т.е. результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия.
2. *Производственная функция* – зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов.
3. *Функция выпуска* (частный вид производственной функции) – зависимость объёма производства от наличия или потребления ресурсов.
4. *Функция издержек* (частный вид производственной функции) – зависимость издержек производства от объема продукции.
5. *Функции спроса, потребления и предложения* – зависимость объёма спроса, потребления или предложения на отдельные товары или услуги от различных факторов (напр-р, цены, дохода и т.п.).

2.5. Предельные величины в экономике. Эластичность функции, ее свойства и геометрический смысл.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности. Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Спектр используемых в экономике функций весьма широк: от простейших линейных до функций, получаемых по определенному алгоритму с помощью так называемых рекуррентных соотношений, связывающих состояния изучаемых объектов в разные периоды времени.

1. Задача о производительности труда.

Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0. За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период времени $z_{cp} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, что *производительность труда в момент времени t_0* можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0)$$

2. Пусть функция $y = y(x)$ задает зависимость издержек производства y от количества выпускаемой продукции x. Пусть Δx - прирост продукции, тогда Δy - приращение издержек производства и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$- среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает ***предельные издержки*** *производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.*

Аналогично определяются *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и т.д.

Предельные величины характеризуют *процесс, изменение экономического объекта*. Таким образом, *производная выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса) по времени или относительного другого фактора*.

Рассмотрим **соотношения между средним и предельным доходом** в условиях монопольного и конкурентного рынков.

Замечание: В экономической литературе предельные величины называют также *маржинальными*. При их записи к обычному обозначению величин добавляется буква *M*. При записи средних величин добавляется буква *A*. Например: *MR* – предельный доход, *AR* – средний доход.

Пусть r – суммарный доход (выручка) от реализации продукции,

p – цена единицы продукции,

q – количество продукции Тогда $r=pq$

В **условиях монополии** одна или несколько фирм полностью контролируют предложение некоторой продукции, а значит и цены на неё. При этом с увеличением цены спрос на продукцию падает. Пусть это происходит по прямой $p=aq+b$, где $a<0$, $b>0$, т.е. линейная убывающая функция. Тогда $r=(aq+b)q=aq^2+bq$. И средний доход на единицу продукции $r_{ср}=\frac{r}{q}=aq+b$.

Предельный доход составит $r_q'=2aq+b$ (рис. 1)

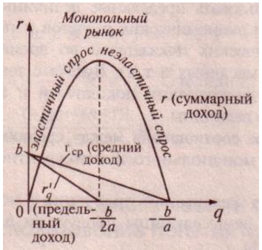


рис. 1

рис. 2

Следовательно, *в условиях монопольного рынка с ростом количества реализованной продукции предельный доход снижается, что приводит к уменьшению среднего дохода*.

В условиях **совершенной конкуренции** каждая фирма не способна контролировать уровень цен. Пусть преобладающая рыночная цена $p=b$. При этом суммарный доход составит $r=bq$ и соответственно средний доход $r_{ср}=\frac{r}{q}=b$ и предельный доход $r_q'=b$ (рис. 2).

Таким образом, *в условиях свободного конкурентного рынка средний и предельный доходы совпадают.*

Для исследования экономических процессов и решения прикладных задач используется понятие *эластичности функции.*

ОПР: *Эластичностью функции* $E_x(y)$ называется предел относительного приращения функции y к относительному приращению переменной x при $\Delta x\to 0$:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\cdot y'$$

Эластичность функции показывает приближенно, на сколько процентов изменится функция $y=f(x)$ при изменении независимой переменной x на 1%.

Геометрический смысл:

$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{x}{y}tg\,\alpha$, где $tg\,\alpha$ - тангенс угла наклона касательной в точке $M(x;y)$

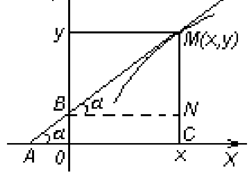


рис. 3

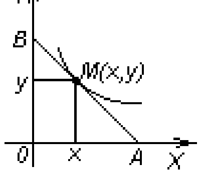


рис. 4

$\Delta MBN:\ MN=x\cdot tg\,\alpha,\ MC=y,\ \Delta MBN\propto\Delta AMC\Rightarrow\frac{MN}{MC}=\frac{MB}{MA}$. Значит $E_x(y)=\frac{MB}{MA}$

Т.е. *эластичность функции (по абсолютной величине) равна отношению расстояний по касательной от данной точки графика функции до точек её пересечения с осями Ox и Oy*.

Если точки *A* и *B* находятся по одну сторону от точки *M*, то эластичность положительна (рис. 3), если по разные, то отрицательна (рис. 4).

Свойства эластичности функции:

1) Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, т.е. $E_x(y) = x \cdot T_y$.

2) Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме (разности) эластичностей этих функций. $E_x(UV) = E_x(U) + E_x(V)$ и $E_x(\frac{U}{V}) = E_x(U) - E_x(V)$.

3) Эластичности взаимнообратных функций – взаимно обратные величины. $E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}$

Итак, эластичность спроса y относительно цены (или дохода) x показывает приближенно, на сколько процентов изменится спрос при изменении цены (дохода) x на 1%. Причем:

- если эластичность спроса $|E_x(y)| > 1$, то спрос считают *эластичным*;
- если эластичность спроса $|E_x(y)| < 1$, то спрос считают *неэластичным* относительно цены (дохода);
- если эластичность спроса $|E_x(y)| = 1$, то говорят о спросе *с единичной эластичностью*.

Выясним как влияет эластичность спроса относительно цены на суммарный доход *r=pq* при реализации продукции. Пусть *p=p(q)*- произвольная функция (не обязательно линейная). Найдем предельный доход.

$$r'_q = (pq)'_q = p'_q \cdot q + p \cdot 1 = p\left(1 + \frac{q}{p} p'_q\right) = p(1 + E_q(p))$$

По свойству 3: $E_q(p) = \frac{1}{E_p(q)}$ и $E_p(q) < 0$, получим при произвольной кривой спроса

$$r'_q = p\left(1 + \frac{1}{|E_p(q)|}\right)$$

- если спрос эластичен, то предельный доход r'_q - положителен при любой цене. Это означает, что *для продукции эластичного спроса с возрастанием цены суммарный доход от реализации продукции увеличивается*.
- если спрос неэластичен, то предельный доход r'_q - отрицателен при любой цене. Это означает, что *для продукции неэластичного спроса с возрастанием цены суммарный доход от реализации продукции уменьшается*.

Пример 1: Зависимость между издержками производства y и объёмом выпускаемой продукции x выражается функцией $y = 50x - 0{,}05x^3$ (ден. ед.). Определить средние и предельные издержки при объёме продукции 10 ед.

Решение: Функция средних издержек: $y_{ср} = \frac{y}{x} = 50 - 0.05x^2$ $\quad y_{ср}(10) = 45$ (ден. ед.).

Функция предельных издержек: $y'(x) = 50 - 0{,}15x^2$ $\quad y'(10) = 35$ (ден. ед.).

Итак, если средние издержки на производство единицы продукции =45 ден. ед., то предельные издержки (дополнительные затраты на производство ед. продукции), при объёме выпускаемой продукции 10 ед., =35 ден. ед.

Пример 2: Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс. руб.) и выпуском продукции x (млрд. руб.) выражается функцией $y = -0{,}5x + 80$. Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, =60 млн. руб.

Решение:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' \quad \Rightarrow \quad E_x(y) = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x + 80} = \frac{x}{x - 160} \Rightarrow \quad E_{x=60}(y) = -0{,}6,$$

т.е. при выпуске продукции, равном 60 млн. руб., увеличение его на 1% приведет к снижению себестоимости на 0,6%.

Пример 3: Объём продукции u, произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$ (ед.), $1 \le t \le 8$, где t – рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп её изменения через час после начала работы и за час до её окончания.

Решение: Производительность труда: $z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100$ (ед./ ч.)

Скорость производительности: $z'(t) = -5t + 15$ (ед./ ч^2)

Темп изменения производительности: $T_z(t) = (\ln z(t))' \Rightarrow T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{2t-6}{t^2-6t-40}$ (ед./ч.)

Если $t_1 = 1$, то $z(1) = 112{,}5$ (ед./ ч.), $z'(1) = 10$ (ед./ ч^2), $T_z(1) = 0{,}09$ (ед./ч.)

Если $t_2 = 8 - 1 = 7$, то $z(7) = 82{,}5$ (ед./ ч.), $z'(7) = -20$ (ед./ ч^2), $T_z(7) = -0{,}24$ (ед./ч.)

Итак, к концу работы производительность труда снижается. Изменение знаков говорит о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется её снижением в последние часы.

Пример 4: Опытным путем установлены функции спроса $q = \frac{p+8}{p+2}$ и предложения $s = p + 0{,}5$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена товара. Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.
Решение:
а) Равновесная цена определяется из условия $q=s$: $\frac{p+8}{p+2} = p + 0{,}5 \Rightarrow p = 2$ (ден. ед.) - равновесная цена.

б) $E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$

$E_p(q) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}$ - эластичность спроса и $E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}$ - эластичность предложения.

Для равновесной цены $p=2$: $E_{p=2}(q) = -0{,}3$ и $E_{p=2}(s) = 0{,}8$.

$E_{p=2}(q) < 1$ и $E_{p=2}(s) < 1 \Rightarrow$ спрос и предложение при равновесной цене неэластичны. Т.е. при увеличении цены p на 1% спрос уменьшится на 0,3%, а предложение увеличится на 0,8%.
в) При увеличении цены на 5% от равновесной спрос уменьшится на $5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5\%$, значит доход возрастет на 3,5%.
Пример 5: Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна 1?
Решение:
Пусть $y = f(x)$ - полные затраты предприятия, где x – объём выпускаемой продукции.

Средние затраты на производство ед. продукции $y_{cp} = \frac{y}{x}$

$E_x(y) = 1$ и $1 = \frac{x}{y} \cdot y' \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$ - предельные издержки предприятия.

Итак, $y_{cp} = y'$, т.е. предельные издержки = средним издержкам.

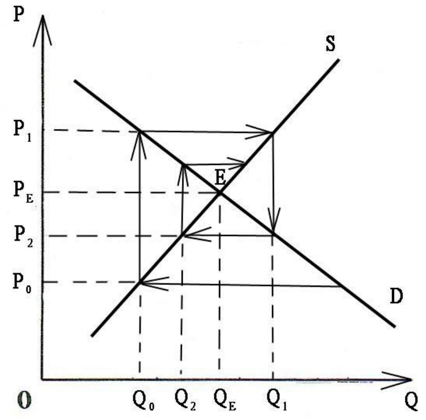
Заметим: полученное утверждение верно только для линейных функций издержек.

2.6. Паутинные модели рынка.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.

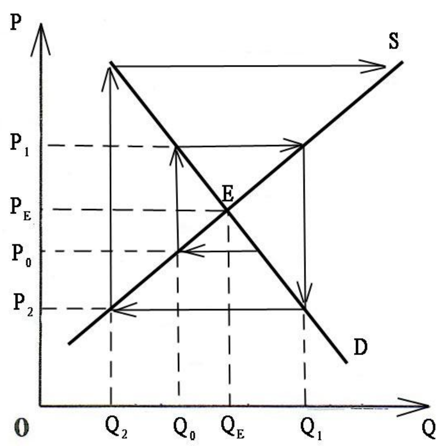
Паутинообразная модель рынка — это динамическая модель рынка, показывающая способность рынка к самостоятельному установлению равновесия в результате взаимодействия спроса и предложения.

В данной модели предложение реагирует на изменение спроса не сразу, а с запозданием, что приводит к возникновению ценовых колебаний. В экономической теории различают *затухающие*, *усиливающиеся* и *равномерные* колебания цены.



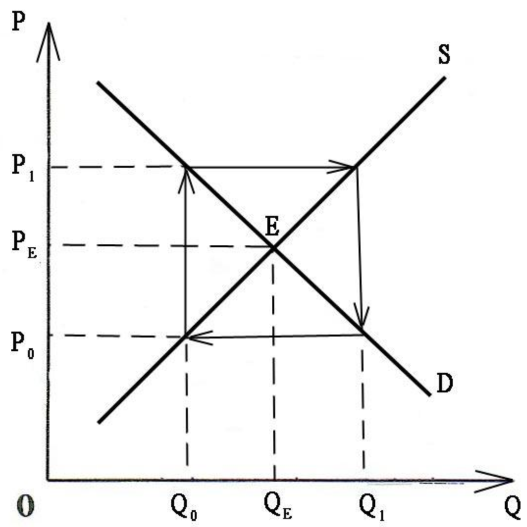
Паутинообразная модель рынка с затухающими колебаниями цен

На первом графике представлена паутинообразная модель рынка с затухающими колебаниями цен. Эти колебания происходят когда кривая предложения более крутая, чем кривая спроса. В результате этих затухающих колебаний на рынке восстанавливается равновесие. Первоначально на рынке сложилась ситуация когда продавцы предлагают свой товар по цене P_0 и в объеме Q_0, т.е. на уровне ниже равновесного состояния рынка. При данной цене на рынке возникает дефицит товара, из-за которого цена начинает повышаться до уровня P_1 и у производителей возникнет желание увеличить производство товара до уровня Q_1. Естественно, что рано или поздно при повышенной цене спрос неминуемо сократится и окажется меньше предложения. На рынке возникнет избыток товара, что подтолкнет продавца снизить цену до уровня P_2и снизить предложение товара до уровня Q_2. В результате дальнейших подобных колебаний рынок рано или поздно найдет тот равновесный уровень, который будет отвечать требованиям продавца и покупателя.
На втором графике представлена противоположная первой паутинообразная модель рынка с усиливающимися колебаниями цен, которые свойственны в случае когда кривая спроса имеет более крутой наклон, чем кривая предложения. В этом случае цена будет все дальше отдаляться от равновесного уровня. Теоретически при таких колебаниях и все большего отдаления от равновесного уровня рынок может разрушиться.



Паутинообразная модель рынка с усиливающимися колебаниями цен

На третьем графике представлена паутинообразная модель рынка с равномерными колебаниями цен. Еще одна возможная ситуация на рынке, которая может возникнуть в случае когда кривая спроса и предложения имеет одинаковый наклон.



Паутинообразная модель рынка с равномерными колебаниями цен

В этом случае цена колеблется в определенном диапазоне не приближаясь к равновесному уровню, а рынок находится либо в состоянии дефицита, либо в состоянии избытка товара.
Подводя итог, можно сказать, что паутинообразная модель рынка показывает, что:

- колебания цен возникают в результате запоздалой реакции продавца на изменение спроса;
- не во всех случаях равновесие на рынке достигается самостоятельно.

2.7. Производственная функция Кобба-Дугласа.

При изучении вопроса необходимо обратить внимание на следующие особенности.
[Cobb—Douglas production function] — *производственная функция*, примененная американскими исследователями Ч. Коббом и *П. Дугласом* при анализе развития экономики США в 20—30-х гг. XX века. Имеет простую алгебраическую форму:
$N = A \cdot L^{\alpha}K^{\beta}$,
где N — *национальный доход*; A — коэффициент размерности; L и K — соответственно объемы приложенного труда и капитала; α и β — константы (*коэффициенты эластичности производства* по труду L и капиталу K).

Функция — однородная степени α+β; следовательно, увеличение L и K в одинаковое число раз mувеличивает доход в $m^{\alpha+\beta}$ раз. Если сумма α+β равна единице — функция линейно однородная; если больше или меньше единицы, имеет место *эффект масштаба* (соответственно положительный или отрицательный).

К.—Д. ф. основывается на предположениях о понижающейся предельной отдаче ресурсов (см. *Закон убывающей отдачи*, *Предельный эффект затрат*), постоянстве коэффициентов эластичности производства по затратам ресурсов. *Эластичность замещения ресурсов* в любой точке кривой К.—Д. ф. равна единице.

Хотя К.—Д. ф. нельзя отнести к линейным, значения *параметров* A, α, β можно оценить с помощью линейного *регрессионного анализа* по *методу наименьших квадратов*. Для этого ее приводят к линейному виду, прологарифмировав обе части уравнения (обычно здесь берутся натуральные логарифмы):

$lnN = ln\,A + \alpha\, lnL + \beta\, lnK$.

Модификация функции, учитывающая технический прогресс, достигается введением дополнительного сомножителя e^{π}, где π — темп технического прогресса (константа).

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практические занятия по теме «Элементы линейной алгебры и их применение для решения экономических задач».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.
1. Действия над матрицами, их свойства

2. Правило вычисления определителей второго порядка.
3. Способы и правила вычисления определителя третьего порядка.
4. Понятия минора и алгебраического дополнения. Теорема Лапласа.
5. Алгоритм решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
6. Теорема Кронекера-Капелли для исследования систем.
7. Алгоритм решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.

3.2 Практические занятия по теме «Функция одной и нескольких переменных».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Способы задания функций. Область определения и множество значений функции. График функции.
2. Характеристики функций: четность и нечетность, периодичность, монотонность, ограниченность.
3. Сложная и обратная функции.
4. Степенная, показательная и логарифмическая функции.
5. Тригонометрические функции и обратные к ним.
6. Прогрессии. Формула сложных процентов.
7. Различные типы пределов: односторонние пределы, пределы в бесконечности, бесконечные пределы. Сравнение бесконечно малых функций: эквивалентные функции.
8. Первый и второй замечательные пределы.
9. Формула непрерывных процентов.
10. Непрерывность функции в точке. Непрерывность суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Теорема о сохранении знака непрерывной функции. Точки разрыва функции, их классификация.
11. Производная функции. Дифференцируемость и дифференциал функции.
12. Производные основных элементарных функций.
13. Производная сложной и обратной функции.
14. Геометрический смысл производной. Геометрический смысл дифференциала функции.
15. Признак монотонности функции на интервале. Достаточные условия локального экстремума.
16. Выпуклые (вогнутые) функции. Достаточные условия выпуклости функции. Необходимый и достаточный признаки точки перегиба.
17. Асимптоты графика функции.
18. Общая схема исследования функции и построения ее графика.
19. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов.
20. Свойства неопределенного интеграла.
21. Замена переменной в неопределенном интеграле, интегрирование по частям.
22. Формула Ньютона-Лейбница.
23. Геометрические приложения определенного интеграла: вычисление площади криволинейной трапеции.
24. Функции нескольких переменных. Поверхности (линии) уровня функции. Элементарные функции нескольких переменных.
25. Частные производные, дифференцируемость, дифференциал функции нескольких переменных.
26. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных.
27. Локальный экстремум функции нескольких переменных. Необходимое условие первого порядка. Достаточные условия существования локального экстремума.

3.3 Практические занятия по теме «Ряды и дифференциальные уравнения».

При подготовке к занятиям необходимо обратить внимание на следующие моменты.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка, нормальная форма.
2. Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка в нормальной форме.
3. Общее и частное решения уравнения. Общий интеграл. Особые решения.
4. Уравнения с разделяющимися переменными, алгоритм решения.
5. Однородные уравнения, алгоритм решения.
6. Линейные уравнения и уравнения Бернулли, алгоритм решения.

7. Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимый признак сходимости.
8. Числовые ряды с положительными членами: критерий сходимости.
9. Достаточные признаки сходимости: первый и второй признаки сравнения, признак Даламбера и Коши в предельной форме, интегральный признак Коши.
10. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
11. Степенные ряды. Теорема Абеля. Область, интервал и радиус сходимости степенного ряда.

Разработал(а): ______________________________ В.А.Ротова