ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Информатика и прикладная математика**»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Математика

Направление подготовки: 39.03.02 Социальная работа
Профиль: Социальная работа в системе социальных служб
Квалификация (степень) выпускника: бакалавр
Форма обучения: очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

1.1 Лекция 1 (2 ч.)

Тема: **Элементы теории матриц и определителей (Презентация «Элементы теории матриц и определителей»)**

1.1.1 Вопросы лекции:

1.Матрицы, их классификация, действия над матрицами.
2.Определители второго и третьего порядка, вычисление, свойства.
3. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Муавра-Лапласа
4. Нахождение обратной матрицы

1.1.2. Краткое содержание вопросов:

1. Матрицы, их классификация, действия над матрицами.

Матрицей называют таблицу, состоящую из n строк и m столбцов. Элементами матрицы могут быть числа или иные математические объекты (Слайд 3).

$$A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 4 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix} B=\begin{pmatrix}\sin\alpha & \sin\beta\\ \cos\alpha & \cos\beta\end{pmatrix} C=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}$$

Прямоугольная таблица, содержащая *m* строки *n* столбцов действительных чисел называется **числовой матрицей.**

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\dots & a_{1\gamma}\dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\dots & a_{2\gamma}\dots & a_{2n}\\ a_{i1} & a_{i2}\dots & a_{ij}\dots & a_{in}\\ a_{m1} & a_{m2}\dots & a_{mj}\dots & a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Сокращенно $A_{m\times n}=(a_{ij})$. Далее будем рассматривать числовые матрицы.

Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее **элементами**, где i=1,2,…m номер строки, j=1,2,…n номер столбца.

Матрицы обозначается заглавными буквами латинского алфавита A, B, C…, элементы строчными буквами.

Если число строк и столбцов одной матрицы равно числу строк и столбцов другой матрицы, то они называются **одноразмерными матрицами.**

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется **квадратной матрицей** (Слайд 4). Квадратную матрицу размером n×n называют матрицей **n-ого порядка**.

$A_{2\times2}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ - квадратная матрица 2-ого порядка

a_{11}, a_{22} элементы главной диагонали
a_{12}, a_{21} элементы побочной диагонали

$$A_{3\times3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ квадратная матрица 3-его порядка

a_{11}, a_{22}, a_{33} элементы главной диагонали

a_{13}, a_{22}, a_{31} элементы побочной диагонали

Квадратная матрица, все элементы которой, стоящие выше (ниже) главной диагонали равны нулю, называется **треугольной матрицей.**

Квадратная матрица, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали равны нулю, называется **диагональной матрицей.**

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны между собой, называется **скалярной матрицей.**

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны 1, называется **единичной матрицей** (Слайд 5).

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ единичная матрица 3-его порядка

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей** (Слайд 6).

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором (или вектор- столбец, или вектор-строка соответственно).**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е.$(5)_{1\times1}$ есть 5.

Одноразмерные матрицы **равны между собой**, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

Квадратная матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к матрице А. тогда и только тогда, когда $A*A^{-1}=A^{-1}*A=E$

Действия над матрицами

Одноразмерные матрицы можно складывать.

Алгебраической суммой двух матриц$A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$такая, что $c_{ij}= a_{ij}+ b_{ij}$ (i=1,2..m, j=1,2…n) (Слайд 7)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3x3} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}_{3x3} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \\ a_{31} \pm b_{31} & a_{32} \pm b_{32} & a_{33} \pm b_{33} \end{pmatrix}$$

Пример:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 4 & -5 & 6 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 8 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & -9 & 8 \\ 6 & -4 & 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = A + B = \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 12 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & -7 & 15 \\ 6 & 0 & -2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

Операция сложения одноразмерных матриц обладает следующими свойствами:

-коммутативность (переместительный закон) A+B=B+A

-ассоциативность (сочетательный закон)

(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C

- A+**0**=A

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на число k называется матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$ такая, что $b_{ij}= ka_{ij}$(i=1,2..m, j=1,2…n). Т.е. **Произведением числа k на матрицу A** называется матрица, определяемая равенством:

$$\mathbf{k} \bullet \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$ (Слайд 8)

Пример:

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, число k=2, $2A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

Матрица (–A), все элементы которой получены путем умножения соответствующих элементов матрицы A на (-1) называется матрицей **противоположной A.**

Умножение матрицы на число обладает следующими свойствами:

- 1·A=A
- к·(A+B)=к·A+к·B

-(α+β)·A=α·A+β·A

-(αβ)·A=α·(βA)

- A+(- A)=**0**

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда **число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы** (Слайд 9).

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ на матрицу $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$ такая, что $c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nk}$, где i=1,2..m, k=1,2,..

…р, т.е. элемент i-й строки и k-ого столбца матрицы произведения С равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы А на соответствующие элементы k-ого столбца матрицы В.

Иными словами: **Произведение двух матриц А и В** обозначается символом АВ и определяется **равенством:**

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{1j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{2j}b_{j3} \\ \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j2} & \sum_{j=1}^{3} a_{3j}b_{j3} \end{pmatrix}$$ (Слайд 9-10)

Пример: $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $C=A\cdot B=\begin{pmatrix} 9 & 10 & 1 \\ -19 & 13 & 0 \end{pmatrix}$

$c_{11}=3\cdot5+1\cdot(-2)+2\cdot(-2)=9$
$c_{12}=3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2=10$
$c_{13}=3\cdot0+1\cdot1+2\cdot0=1$
$c_{21}=-1\cdot5+0\cdot(-2)+7\cdot(-2)=-19$
$c_{22}=-1\cdot1+0\cdot3+7\cdot2=13$
$c_{23}=-1\cdot0+0\cdot1+7\cdot0=0$

Если матрицы А и В - квадратные одного размера, то произведения АВ и ВА всегда существуют.

Умножение матриц обладает следующими свойствами: (Слайд 11)

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строк столбцами с с сохранением нумерации, называется **матрицей транспонированной к данной**. Обозначается A^T (A'). (Слайд 12)

Пусть дана матрица $A_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$, тогда

$$A^T_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1m} & a_{2m} & ... & a_{nm} \end{pmatrix}$$

2.Определители второго и третьего порядка, вычисление, свойства.

Каждой квадратной матрице А соответствует число - определитель данной матрицы Δ (det A) (Слайд 13).

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - **определитель второго порядка**.

B=$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \to \Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$ - **определитель третьего порядка**

Для вычисления определителя второго порядка используют формулу:

A=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet a_{22} - a_{12} \bullet a_{21}$

Пример:

1) A=(a_{11}) матрица 1-ого порядка

$\Delta_1 = |a_{11}| = a_{11}$| 7|=7 | -3|=-3

2) A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрица 2-ого порядка

Δ_2=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-3) - (-2) \cdot 3 = -21 + 6 = -15$

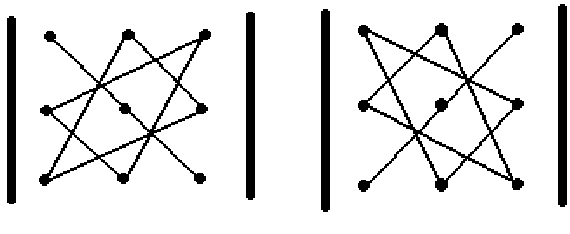
Определителем третьего порядка называют число, обозначаемое символом

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и определяемое равенством

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (2)$$

Определитель 3-его порядка можно вычислить по правилу треугольника, схеме Сарруса (Слайд 14). Чтобы запомнить, какие произведения в правой части равенства (2) берутся со знаком «+», а какие со знаком«—», полезно использован следующее правило треугольников:



«+» «-»

Это правило позволяет легко записать формулу (2) и вычислить данный определитель.

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрица 3-его порядка

Правило треугольника:

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5\cdot4\cdot4+(-2)\cdot3\cdot5+(-1)\cdot3\cdot0-(-2)\cdot4\cdot(-1)-5\cdot5\cdot3-4\cdot3\cdot0=-33$$

3. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Муавра-Лапласа (Слайд 15)

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы n-ого порядка называется определитель n-1 порядка, полученного путем вычеркивания из исходного определителя i-ой строки и j-ого столбца.

Пример:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad M_{13}=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}=-35 \quad M_{22}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}=20 \quad M_{32}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=14$$

Алгебраическим дополнением A_{ij}элемента a_{ij} квадратной матрицы n-ого порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij.}$

Например, если элемент a_{12} находится на пересечении первой строки и второго столбца, то для него p=1+2=3 и его алгебраическим дополнением является

$$A_{12}=(-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -\,(a_{21} \bullet a_{33} - a_{23} \bullet a_{31})$$

$$\text{Пример: } A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}=-35 \quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=1\cdot20=20$$

Теорема Лапласа: Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\sum_{i=1}^{n} a_{is}A_{is}\ .$$

Например, разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки записывается так:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \bullet A_{11} + a_{12} \bullet A_{21} + a_{13} + A_{13}$$

Значение теоремы разложения состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению определителей (n-1)-го порядка.

Пример: Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Решение: Раскладывая определитель по элементам первой строки, получаем:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $=1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} +2(-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} +3(-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ =1 (1*2 - 0*1) - 2(0*2 - 0*2) + 3(0*1 - 2*1)= - 4

Ответ: Δ=-4

Свойства определителей

1. Определитель не изменяется, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами,

2. При перестановки двух строк (или столбцов) определитель изменит знак на противоположный, сохраняя абсолютную величину.

3. Определитель с двумя одинаковыми сроками (столбцами) равен нулю.

4. Общий множитель всех элементов строки или столбца можно вынести за знак определителя;

5. Если все элементы какой-то строки или столбца равны 0, то и определитель равен 0.

6. Если все элементы какой-то строки (столбца) пропорциональны элементам другой строки (столбца), то определитель равен 0.

Теорема о существовании обратной матрицы: Квадратная матрица имеет обратную тогда и только тогда, кода ее определитель отличен от нуля.

Матрица, у которой определитель отличен от нуля, **называется невырожденной**, в противном случае она вырождена.

4. Нахождение обратной матрицы

Обозначим через матрицу A матрицу системы (*), составленную из коэффициентов при неизвестных, через X – матрицу – столбец из неизвестных, через B – матрицу-столбец из свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица A^{-1} называется обратной для матрицы A, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и A, и матрица A называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю, т.е. $\Delta = |A| \neq 0$

Каждая невырожденная матрица A имеет обратную, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{11}, A_{12}, …A_{33} – алгебраические дополнения элементов матрицы A.

1.2 Лекция 2 (2 ч.)

Тема: **Системы линейных уравнений и методы их решений (Презентация «Системы линейных уравнений и методы их решений»)**

1.3.1. Вопросы лекции:

1. СЛУ, их классификация
2.Метод Крамера
3. Метод Гаусса
4. Метод обратной матрицы

1.3.2. Краткое содержание вопросов:

1. СЛУ, их классификация

Структура вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------------ \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n = b_i \\ ------------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mj}x_j + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} , b_i (i=1,2,…m) (j=1,2,…n) – произвольные числа:
a_{ij} – коэффициенты при переменных x_j;
b_i – свободные члены,
называется **системой m линейных уравнений относительно n неизвестных** (Слайд 3)

Решением системы m линейных уравнений относительно n неизвестных называется упорядоченный набор чисел (кортеж) $(x_1,x_2,\dots x_n)$ при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в истинное числовое равенство.

Решить систему - значит, найти множество всех ее решений.

Система может иметь а) единственное решение; б) бесконечное множество решений; в) пустое множество решений.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**.

Система, имеющая пустое множество решений, называется **несовместной.**

Совместная система, имеющая единственное решение, называется **определенной**.

Совместная система, имеющая бесконечное множество решений, называется **неопределенной**.

Две системы называются **равносильными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Рассмотрим элементарные преобразования, позволяющие получить систему, равносильную данной:

а) перестановка уравнений;

б) вычеркивание из системы уравнения вида $0x_1+0x_2+\dots+0x_n=0$;

в) умножение обеих частей, какого то уравнения на одно и то же число, отличное от нуля;

г) прибавление к обеим частям одного из уравнений соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и тоже число.

2.Метод Крамера (Слайд 4)

Для простоты рассмотрим систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - это определитель матрицы коэффициентов A(det A) или его еще называют определителем системы и он составлен из коэффициентов при неизвестных. Обозначим его Δ.

2) $c_1a_{22} - c_2a_{12} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ - - определитель, который получается из det A, **если в** нем столбец коэффициентов при X_1 (первый столбец) заменить на столбец свободных членов. Обозначим его Δx_1.

3) $c_2a_{11} - c_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$- определитель, который получится, если в det A столбец коэффициентов при x_2 заменить на столбец правых частей. Обозначим его Δx_2

Можно доказать, что $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$, a $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$

Если мы возьмем систему трех уравнений с тремя неизвестными, то формулы останутся те же:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

Эти формулы широко известны и называются **формулами Крамера.**

Формулы Крамера применяются для решения систем линейных уравнений, если определитель системы отличен от нуля (матрица коэффициентов является невырожденной)

Если же $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_1 или Δ_2 или Δ_3 не равен нулю, то система (1.2) решений не имеет.

Если же $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Пример: Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера: (Слайд 5)

Еще пример:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

Вычислим определитель Δ системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8\cdot1\cdot(-3) + 3\cdot(-1)\cdot4 + 1\cdot1\cdot(-6) -$$

$$-6\cdot1\cdot4 - 3\cdot1\cdot(-3) - 8\cdot1\cdot(-1) = -24 - 12 - 6 + 24 + 9 + 8 = -1 \neq 0$$

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 1 \cdot (-3) + 3\cdot(-1)\cdot(-5) + 2\cdot 1\cdot(-6) -$$

$$-6\cdot 1\cdot(-5) - 3\cdot 2\cdot(-3) - (-4)\cdot(-1)\cdot 1 = 12 + 15 - 12 - 30 + 18 - 4 = -1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 8\cdot 2\cdot(-3) + (-4)\cdot(-1)\cdot 4 + 1\cdot(-5)\cdot(-6) -$$

$$-6\cdot 2\cdot 4 - 8\cdot(-5)\cdot(-1) - (-4)\cdot 1\cdot(-3) = -48 + 16 + 30 + 48 - 40 - 12 = -6$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 8\cdot 1\cdot(-5) + 3\cdot 2\cdot 4 + (-4)\cdot 1\cdot 1 - (-4)\cdot 1\cdot 4 - 1\cdot 3\cdot(-5) - 8\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= -40 + 24 - 4 + 16 + 15 - 16 = -5$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-1} = 6, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-1} = 5.$$

Ответ: (1,6,5)

3. Метод Гаусса (Слайд 7-8)

Рассмотрим решение системы методом Гаусса на конкретном примере:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Метод Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система приводится к равносильной системе ступенчатого вида, из которой последовательно, начиная с последнего, находятся значения переменных.

Составим расширенную матрицу из коэффициентов при переменных и свободных членов, поменяв первую и вторую строку, чтобы $a_{11}=1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

Умножим элементы первой строки на -2 и прибавим к соответствующим элементам второй строки, умножим элементы первой строки на -7 и прибавим к соответствующим элементам третьей строки. В результате получим в первом столбце, во второй и третьей строке 0

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 6 & 1 \\ 0 & -9 & 2 & -7 \end{array}\right)$$

Умножим элементы второй строки на -9 а элементы третьей на 5 и полученные элементы второй строки прибавим к соответствующим элементам третьей строки, тогда получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 45 & -54 & -9 \\ 0 & -45 & 10 & -35 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & -44 & -44 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Запишем преобразованные уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 5x_2 - 6x_3 = -1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Теперь можно найти значения переменных, подставляя последовательно значение x_3 во второе уравнение, найдем x_2, подставим значения x_2 и x_3 в первое уравнение найдем x_1

$$(x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1) \Rightarrow x_1 = 1$$

Ответ: $\{(1;1;1)\}$

Пример:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ 12x_1 + x_2 - 3x_3 = 24 \\ -15x_1 + 4x_2 = -42 \end{cases}$$

Исключим x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого мы должны прибавить ко второму уравнению первое, умноженное на (- 4), а к третьему прибавить первое, умноженное на 5.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \quad \textit{ведущее уравнение} \quad (-4) \quad 5 \\ 12x_1 + x_2 - 3x_3 = 24 \qquad\qquad\qquad\qquad \hookleftarrow \\ -15x_1 + 4x_2 = -42 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \hookleftarrow \end{cases}$$

Получим систему равносильную исходной.

На втором шаге исключения мы не трогаем первое уравнение. Другие два уравнения содержат два неизвестных x_2 и x_3 и к ним можно применить ту же процедуру исключения. Для этого к третьему уравнению прибавляем первое, умноженное на 3.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ -3x_1 + 17x_3 = -8 \quad 3 \\ -9x_2 - 25x_3 = -2 \quad \hookleftarrow \end{cases}$$

Вновь получим систему равносильную исходной.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ \qquad -3x_1 + 17x_3 = -8 \\ \qquad\qquad 26x_3 = -26 \end{cases}$$

Далее наши действия очевидны. Из третьего уравнения $x_3 = -1$, подставляя значения x_3 во второе уравнение, получаем $x_2 = -3$ и, наконец, из первого уравнения получаем $x_1 = 2$.

Если в результате преобразований получим уравнение, в котором все коэффициенты при неизвестных равны нулю, а свободный член отличен от нуля, то полученное уравнение, а следовательно, и вся система несовместны, если же свободный член равен нулю, то система является неопределенной.

Решите предложенные системы методами Крамера и Гаусса.

$$\begin{cases} 2x-2y+z=2 \\ 3x+2y+2z=-2 \\ x-2y+z=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+y-z=3 \\ 3x+3y+2z=10 \end{cases}$$

Ответ: (2;-1;-3)Ответ: система несовместна.

4. Метод обратной матрицы (Слайд 9)

Обозначим через матрицу А матрицу системы (*), составленную из коэффициентов при неизвестных, через X – матрицу – столбец из неизвестных, через B – матрицу-столбец из свободных членов:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица A^{-1} называется обратной для матрицы А, если $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$, где Е – единичная матрица того же порядка, что и А, и матрица А называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю, т.е. $\Delta=|A|\neq 0$

Каждая невырожденная матрица А имеет обратную, причем

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{11}, A_{12}, …A_{33} – алгебраические дополнения элементов матрицы А.

Систему (*) можно записать в матричной форме: $A\cdot X=B$. (Слайд 10)

Умножим слева на A^{-1} обе части этого равенства, получим:

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$.

Так как $A^{-1}\cdot A=E$, имеем $X= A^{-1}\cdot B$ – это решение системы в матричном виде. Следовательно, матрица – решение X находится как произведение A^{-1} и B.

Пример: Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+4x_3=3 \\ x_1+x_2-x_3=1 \\ 7x_1-2x_2-5x_3=0 \end{cases}$$

Обозначим: $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда в матричной форме система имеет вид: $A\cdot X=B$. Чтобы решить матричное уравнение, составим матрицу обратную матрице А.

Чтобы определить, имеет ли матрица А обратную нужно найти её определитель. Если$\Delta_{A,}\neq 0$, то матрица А имеет обратную матрицу A

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix}=-10+21-8-28-15-4=-44$$

Так как определитель матрицы А $|A|\neq 0$, то матрица А имеет обратную матрицу A^{-1}

Составим транспонированную матрицу: $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

Найдем алгебраические дополнения для Aijпо формуле: Aij=(-l)$^{i+j}$ • $M_{:/,}$ где $M_{ц}$ – минор. Минором $M_{ц}$ называется определитель матрицы, полученный путём вычёркивания i-строки и j-столбца.

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 2 = -7$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -(15 + 8) = -23$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -(-5 + 7) = -2$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 28 = -38$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 4) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 7 = -9$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 21) = -17$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

Из алгебраических дополнений транспонированной матрицы составим присоединённую матрицу

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -7 & -23 & -1 \\ -2 & -38 & 6 \\ -9 & -17 & 5 \end{pmatrix}$ Находим обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$

$A^{-1} = -\frac{1}{44} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -23 & -1 \\ -2 & -38 & 6 \\ -9 & -17 & 5 \end{pmatrix}$. Можно проверить правильность составления обратной матрицы A^{-1} • A= E: Теперь по формуле X=A^{-1}·B находим матрицу X

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{44} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -23 & -1 \\ -2 & -38 & 6 \\ -9 & -17 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{1}{44} \cdot (-7 \cdot 3 - 23 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{44} \cdot (-2 \cdot 3 - 38 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = 1$$

$$x_3 = -\frac{1}{44} \cdot (-9 \cdot 3 - 17 \cdot 1 + 5 \cdot 0) = 1$$

Ответ: (1;1;1)

1.3 Лекция 3 (2 ч.)
Тема: **Прямая на плоскости, метрическая теория прямых (Презентация «Прямая на плоскости, метрическая теория прямых»)**

1.3.1. Вопросы лекции:

1.Способы задания прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости.
2. Метрическая теория прямых

1.3.2. Краткое содержание вопросов**:**

1. Способы задания прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Определение. Вектором называется направленный отрезок (упорядоченная пара точек).

Обозначают: $\overrightarrow{AB}$ (точка A - начало вектора, точка B - конец вектора) или одной буквой - $\vec{a}$.

Определение. Длиной вектора (модулем) называется расстояние между началом и концом вектора. Длина вектора обозначается $\overrightarrow{|a|}$ или $\overrightarrow{|AB|}$.

Определение. Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают. Обозначают: $\vec{0}$.

Определение. Единичным вектором называется вектор, длина которого равна единице.

Единичный вектор, имеющий одинаковое направление с данным вектором $\vec{a}$, называется ортом вектора а и обозначается обычно символом $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{\overrightarrow{|a|}}$

Определение. Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение. Векторы называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковое направление.

Определение. Линейными операциями над векторами называются сложение векторов и умножение вектора на число.

Два и более векторов в пространстве называются **компланарными**, если они параллельны одной и той же плоскости или лежат в этой плоскости.

Действия над векторами, заданными своими координатами

Теорема. Пусть на плоскости векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:$\vec{a} = (x_1; y_1)$,

$\vec{b} = \{x_2; y_2\}$.

Тогда $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + y_1;\ x_2 + y_2\}$, $\vec{a} - \vec{b} = \{x_1 - y_1;\ x_2 - y_2\}$, т. е. при сложении или вычитании векторов складываются или вычитаются их одноименные координаты;

$\alpha \cdot \vec{a} = \{\alpha \cdot x_1; \alpha \cdot y_1\}$т. е. при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

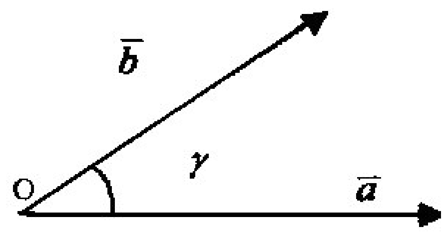
Условие коллинеарности двух векторов

Теорема. Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ в том и только в том случае, когда координаты вектора $\vec{b}$пропорциональны соответственным координатам вектора $\vec{a}$, т. е.

$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.

Линейные операции над векторами, заданными своими координатами в пространстве, производятся аналогично.

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла γ между ними:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\gamma$$

и обозначается $(\vec{a}, \vec{b})$.

Свойства скалярного произведения векторов:

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, *или* $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$;

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, *если* $\vec{a} = 0$, *или* $\vec{b} = 0$, *либо* $\vec{a} \perp \vec{b}$ (ортогональность двух ненулевых векторов)

Пусть векторы $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ заданы своими координатами:

Тогда скалярное произведение этих векторов определяется формулой:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Используя скалярное произведение векторов, можно найти угол между ними:

$$\cos\gamma = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}$$

Например, угол γ между векторами (1,2,0) и (2,3,5) имеет косинус

$$\cos\gamma = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 0 \cdot 5}{\sqrt{(1^2 + 2^2 + 0^2)} \cdot \sqrt{(2^2 + 3^2 + 5^2)}} = \frac{8}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{38}}$$

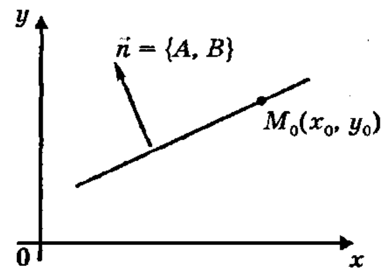
Способы задания прямой на плоскости

Если на плоскости произвольно введена декартова система координат, то всякое уравнение первой степени относительно текущих координат *x*и *y*

Аx + Вy + С =0,

где А и В одновременно не равны нулю, определяют прямую в этой системе координат.

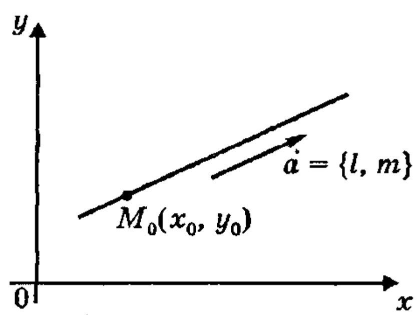
1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n} = \{A, B\}$; (Слайд 3)



2) *Ax+By+C=0* – общее уравнение прямой; (Слайд 4)

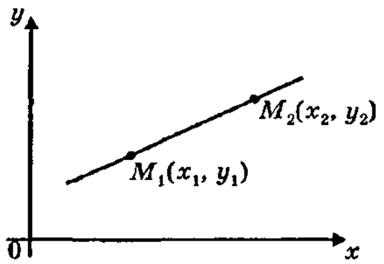
3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках, где *a* и *b* – величины направленных отрезков, отсекаемых на координатных осях Ох и Оу соответственно; (Слайд 5)

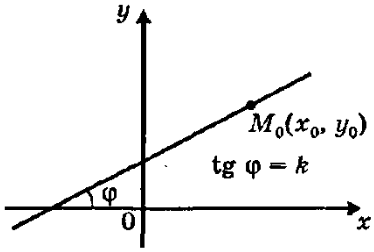
4) $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\vec{a} = \{l, m\}$ {каноническое уравнение прямой); (Слайд 6)



6) $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt; \end{cases}$ $t \in R$ – параметрические уравнения прямой; (Слайд 7)

6) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$; (Слайд 8)





7) $y = kx + b$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом k; b - величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy. (Слайд 9)

2. Метрическая теория прямых на плоскости

$tg\varphi = \left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$ – тангенс острого угла между двумя прямыми (Слайд 10)

$y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$;

$k_1 = k_2$ и $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ – условия параллельности и перпендикулярности двух прямых$y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$; (Слайд 11)

$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ – расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$до прямой$Ax + By + C = 0$; (Слайд 12)

$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $\lambda \neq -1$ - координаты точки *M(x, y)*, делящей отрезок M_1M_2 в отношении λ, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$;

$x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$ – координаты середины отрезка M_1M_2, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

1.4 Лекция 4 (2 ч.)

Тема: **Функции одной действительной переменной, их классификация, основные понятия. Предел и непрерывность функции в точке. (Презентация «Функции одной действительной переменной, их классификация, основные понятия. Предел и непрерывность функции в точке»)**

1.4.1 Вопросы лекции:

1. Числовые множества, их свойства
2. Функции одной действительной переменной, их классификация, свойства, графики.
3. Предел функции в точке, свойства, функций имеющих предел в точке, арифметические операции над пределами, предел элементарных функций.
4. Непрерывные функции, их свойства. Односторонние пределы. Точки разрыва и их классификация.

1.4.2. Краткое содержание вопросов:

1. Числовые множества, их свойства

Множество – совокупность, набор каких-либо предметов (объектов) произвольной природы, объединенных по какому – либо общему для них признаку (множество студентов данной группы, множество цветных телевизоров в гостинице, множество чисел первого десятка, множество точек на прямой и т. д.).

Объекты, из которых состоит множество, называют его ***элементами***. Если элементами множества являются числа, то оно называется ***числовым множеством***. Множества обозначаются большими буквами латинского алфавита A, B, C,…, а их элементы- малыми буквами этого алфавита. Если элемент x принадлежит множеству A, то пишут x A, если же x не принадлежит множеству A, то пишут x A.

Множества можно задать двумя способами:

1) перечислить его элементы;

2) описать его элементы с помощью характеристического свойства.

Множество, не имеющее элементов, называют пустым и обозначают Ø.

Множества бывают конечными и бесконечными.

Например, множество A= { 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 } всех цифр - конечное, а множество всех целых чисел, составленных из этих цифр - бесконечное.

Множество, содержащее все те элементы, которые встречаются в контексте проводимых рассуждений, называется универсальным и обозначается E.

Два множества A и B считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов: A = B ↔ для любого x (x A ↔ x B).

Интервалы, их классификация.

Важнейший принцип аналитической геометрии: между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой существует взаимно однозначное соответствие.

Свойство плотности: между двумя любыми числами на числовой прямой всегда существует бесконечное множество как рациональных, так и иррациональных чисел. Например, между 0,9 и 1 имеется число 0,99 (но 0,(9)=1).

[a,b] – сегмент, отрезок, замкнутый промежуток: $[a,b]=\{x: a\leq x\leq b\}$.

(a,b) – интервал или открытый промежуток: $(a,b)=\{x: a<x<b\}$.

Определение: **ε**-окрестностью точки **a** (ε>0) называется интервал вида (a-ε; a+ε) (рис. 1). Для нее используется обозначение U(a ;ε). Здесь **a** – центр, а ε – радиус окрестности.

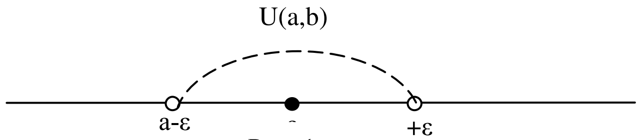


Рис. 1

Окрестности точки бывают как угодно малые, но самой малой окрестности не существует.

Отношения «Точка x принадлежит **ε**-окрестности точки **a**» можно записать любыми из следующих эквивалентных способов:

1) $x\in U(a;\varepsilon)$; 2) $a-\varepsilon<x<a+\varepsilon$; 3) $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$; 4) $\rho(x,a)<\varepsilon$;

5) $|x-a|<\varepsilon$; 6) $x=a\pm\varepsilon$.

Пусть дано числовое множество A.

Определение: Множество A называется ограниченным сверху, если существует такое число M, что для всех элементов x данного множества выполняется неравенство $x\leq M$.

A ограничено сверху $\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists M\forall x \quad (x\in A)\Rightarrow(x\leq M)$

M- называется верхней границей множества A.

Определение: A – ограничено снизу $\overset{def}{\Leftrightarrow}\exists m\forall x(x\in A)\Rightarrow(x\geq m)$

Если множество ограничено и сверху и снизу, то оно называется ограниченным.

Примеры

1. Рассмотрим N- множество натуральных чисел. Сверху оно не ограничено, а снизу ограничено, и его нижними границами являются, например, числа 1 или 0, или -2,5 и т.д.

2. А – множество правильных дробей.

А- ограничено, т.к. его нижней границей является, например, 0, а верхней, например, 1.

2. Функции одной действительной переменной, их классификация, свойства, графики.

Пусть даны два множества Х и У.

Определение: Функцией, отображающей *Х* в *У*, называется соответствие, при котором каждому элементу *х* є *Х* соответствует единственный элемент *у* є *У*. Обозначается это так: $f : X \to Y$. Множество *Х* называется областью определения функции, множество *У* – областью значений функций. Значение функции в точке *х* обозначается *f(x)*.

Определение: Множеством значений функции называется те значения *у* из *У*, которые отвечают хотя бы одному значению *х*є*Х*. Обозначается множество значений $f(x)=\{y:(y=f(x))\wedge(x\in X)\}$.

Обычно для задания функции достаточно знать область определения функции и закон соответствия.

Способы задания функции бывают следующие:

1) аналитический способ; 2) графическое задание; 3) табличный способ;

4) перечисление множества пар вида $(x;f(x))$ и так далее.

4.Классификация функций, обратная функция.

Определение: Функция *f* называется неубывающей (невозрастающей) на множестве *X*, если для любых *x₁* и *x₂* $(x_1\in X, x_2\in X)$. Из того, что $x_2>x_1$ следует, что $f(x_2)\ge f(x_1)$ $(f(x_2)\le f(x_1))$.

$f(x)$ - неубывающая (невозрастающая) на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_1, \forall x_2$ $(x_1\in X)\wedge(x_2\in X)\wedge(x_2>x_1)\Rightarrow f(x_2)\ge f(x_1)$ $(f(x_2)\le f(x_1))$.

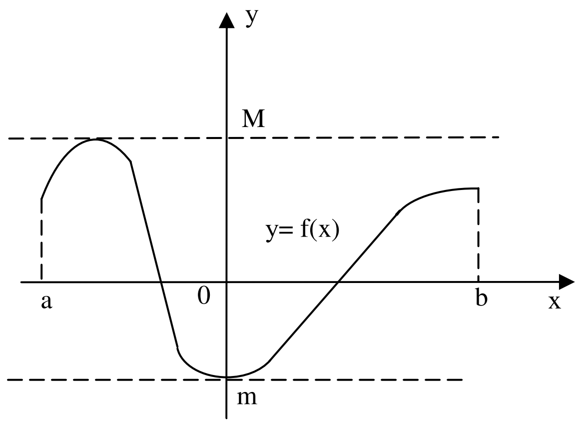


Рис. 2

Невозрастающие и неубывающие функции называются монотонными.

Если в предыдущем определении между значениями функции будет стоять знак строгого неравенства, то функция будет называться **возрастающей и убывающей** (функция тогда называется строго монотонной).

Определение: Функция f называется ограниченной на множестве X, если множество ее значений f(x), принимаемых на данном множестве X, является ограниченным (рис. 1).

Например, $\sin x$, $\cos x$ ограничены на множестве R, функция tgx в своей естественной области определения не ограничена, но она является ограниченной, например, на $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, так как $0\le tgx\le 1$, если $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ (рис. 2).

Определение: Функция f называется четной (нечетной), если выполняется:

1) Область определения симметрична относительно точки x=0, т.е. $\forall x$:

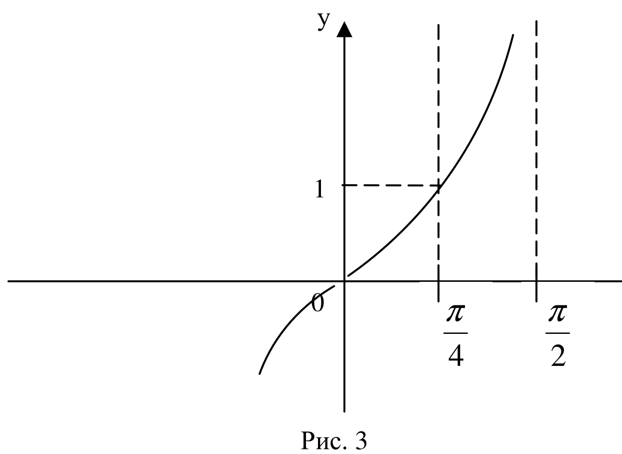


Рис. 3

$x \in D_f \Rightarrow \quad -x \in D_f$.

2) $\forall x \in D_f: \quad f(-x) = f(x) \quad \left(f(-x) = -f(x)\right)$

Примеры

1) $y = x^2$ - четная. 2) $y = x^3$ - нечетная. 3) $y = \dfrac{\sin x}{x}$ - четная. 4) $y = x+1$ - функция ни четная, ни нечетная, так как $y(-x) = -x+1$. 5) $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{x-1}$ при $x \neq 1$ .f(x) – ни четная, ни нечетная, так как ее область определения не симметрична относительно x=0.

6) $f(x) \equiv 0$ - функция четная и нечетная одновременно. четной функции симметричен относительно оси ОУ (осевая симметрия). График нечетной функции симметричен относительно начала координат (центральная симметрия).

Определение: Функция f называется периодической с периодом T>0, если:

1) $\forall x: x \in D_f \Rightarrow x \pm T \in D_f$

2) $\forall x: x \in D_f \Rightarrow f(x+T) = f(x)$.

1. Например, $\sin x$ и $\cos x$ имеют период 2π(*или* $4\pi, 6\pi, \ldots$).
2. tgx и $ctgx$ имеют период π(*или* $2\pi, 3\pi, \ldots$)
3. $f(x) = \sin 2x, T = \pi$.
4. $Y(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)^2$ (рис. 4).

Здесь нарушается первое требование определения, т.е. функция не является периодической.

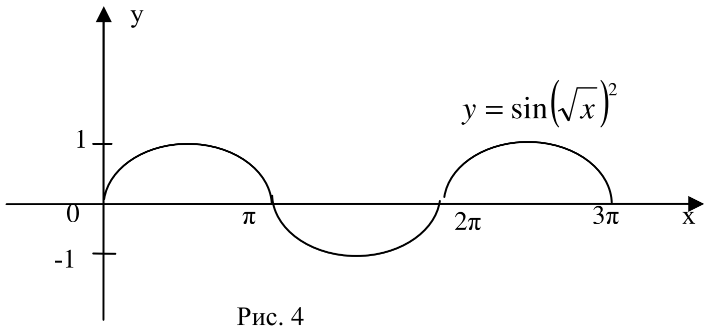


Рис. 4

3. Предел функции в точке, свойства, функций имеющих предел в точке, арифметические операции над пределами, предел элементарных функций.

Пусть $a \in \overline{D}_f, \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. (Слайд 3-7) Рассмотрим соответствующий график (рис. 1):

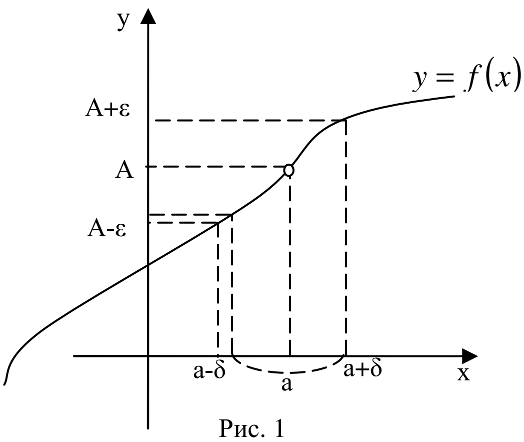


Рис. 1

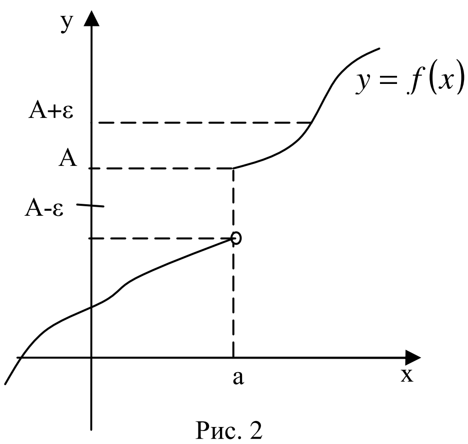


Рис. 2

По графику видно, что какую бы ε-окрестность точки **A** мы ни взяли, найдется такая δ-окрестность точки a, что все значения аргумента из нее отобразятся в выбранную ε-окрестность. Второй же рисунок (рис. 2) показывает, что, если точка **A** не является пределом функции в точке а, то существует такая ε-окрестность точки **А**, для которой соответствующая δ-окрестность не найдется.

Определение Коши: **А**- называется пределом $f(x)$ в точке **a** (или при х, стремящемся к а), если какую бы окрестность точки **А** мы ни взяли, найдется такая окрестность точка **a**, что все значения аргумента из нее будут с помощью данной функции отображаться в выбранную окрестность точки **А**, т.е.

$$A=\lim_{x\to a} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall U(A) \quad \exists U(A), \quad \textit{что} \quad f\left(D_f \cap U(a)\right) \subset U(A)$$

Другая запись определения:

$$A=\lim_{x\to a} f(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall U(A) \quad \exists U(A) \quad \forall x \in D_f \left(x \in U(a)\right) \Rightarrow \left(f(x) \in U(A)\right)$$

Теорема об арифметических действиях над пределами: Пусть $\lim_{x\to a} f(x)=A$, а $\lim_{x\to a} y(x)=B$. Тогда существует в точке а пределы суммы, произведения и частного этих функций (последнее, если $B\neq 0$), и при этом

$\lim_{x\to a}(f(x)+y(x))=A+B$; $\lim_{x\to a} f(x)\cdot y(x)=A\cdot B$; $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{y(x)}=\dfrac{A}{B}$.

$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot y(x))=A\cdot B$ (Слайд 8), (Слайд 9)

Примеры 1) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-1)=\lim_{x\to 1}x-\lim_{x\to 1}1=0$

Предел функции на бесконечности, бесконечно малые и бесконечно большие функции в точке, их свойства. Сравнение бесконечно малых функций в точке. Замечательные пределы. Таблица бесконечно малых эквивалентных.

Если $\lim_{x\to x_0} \mathrm{f(x)}=0$, то функция *f(x)* называется **бесконечно малой** в окрестности точки x_0.

Например: функция $y=x-4$ при $x\to 4$ является бесконечно малой.

Если $\lim_{x\to x_0} \mathrm{f(x)}=-\infty$ или $\lim_{x\to x_0} \mathrm{f(x)}=+\infty$, то функция называется **бесконечно большой** в окрестности точки x_0.

Например: $y=x^3$ при $x\to\infty$ является бесконечно большой

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно

малых функций в окрестности некоторой точки есть функция бесконечно малая в окрестности той же точки;

2) произведение любого конечного числа бесконечно малых функций в окрестности некоторой точки есть функция, бесконечно малая в окрестности той же точки;

3) произведение бесконечно малой функции в окрестности некоторой точки на функцию ограниченную, есть функция, бесконечно малая в окрестности той же точки.

Бесконечно малые функции в окрестности некоторой точки x_0 $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка малости,** если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0.$$

Если c=0 то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой функцией более высокого порядка малости** по сравнению с $\beta(x)$. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными** в окрестности точки x_0, если $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Обозначение:

$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Примеры. 1) Бесконечно малые $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2}$ *и* $\beta(x)=\dfrac{3}{5x^2}$ - являются бесконечно малыми одного порядка при $x\to\infty$, т.к. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1\cdot 5x^2}{x^2\cdot 3}=\dfrac{5}{3}c\neq 0$.

2) При $x\to\infty$ $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^5}$ является бесконечной малой более высокого порядка чем $\beta(x)=\dfrac{1}{x}$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1\cdot x}{x^5\cdot 1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^4}=0\cdot$

3) При $x\to\infty$ $\alpha(x)=\dfrac{1}{x+5}$ *и* $\beta(x)=\dfrac{1}{x+18}$ являются эквивалентными бесконечно малыми, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{1\cdot(x+18)}{(x+5)\cdot 1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+18}{x+5}=1\cdot$

Предел бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией т.е.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f_1(x)}{\varphi_1(x)},\text{если } f(x)\sim f_1(x),\ \varphi(x)\sim\varphi_1(x)$. (Слайд 10)

4. Непрерывные функции, их свойства. Односторонние пределы. Точки разрыва и их классификация.

Понятие непрерывности функции

Рассмотрим $f(x)=x^2$ и найдем значение функции в точке π: $f(\pi)\approx f(3{,}1)=3{,}1^2=9{,}61$. Точнее $f(\pi)\approx f(3{,}14)=3{,}14^2=9{,}86$.

2) Аналогично для $Y(x)=\dfrac{10}{x-3{,}12}$:

$$y(\pi)\approx Y(3{,}1)=\frac{10}{3{,}1-3{,}12}=-500$$

$$y(\pi)\approx Y(3{,}14)=\frac{10}{3{,}14-3{,}12}=+500 \quad (!)$$

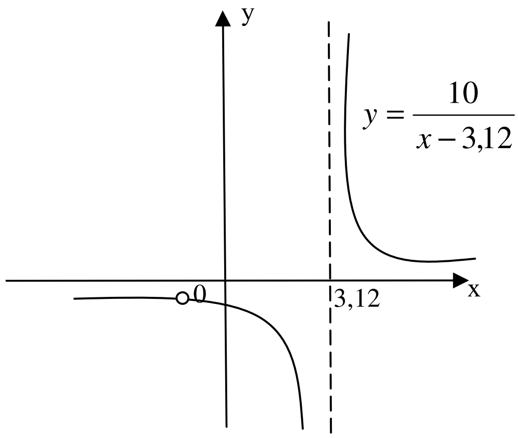
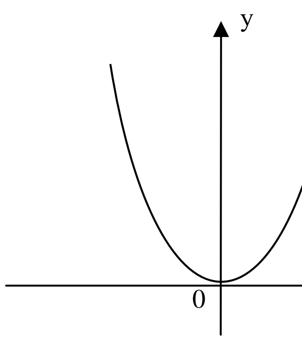


Рис. 3

Мы видим, что для функции f ее значения в точках x=3,1 и x=3,14 мало отличаются между собой, а для другой функции У сильно отличаются. Эффект объясняется тем, что в первом случае имеем дело с непрерывной функцией, а во втором – с разрывной (см. рис. 3, 4).

Следовательно, вычисления с разрывными функциями надо проводить осторожно. А для этого их надо уметь отличать до построения графика.

Перед нами стоит задача сформулировать определение непрерывности функции в точке x=a. Хотя интуитивно понятие непрерывной функции ассоциируется с «непрерывностью» ее графика, но мы не можем это условие принять за определение непрерывности



функции. Определение должно носить аналитический характер. Действительно, во-первых, анализ не может опираться на геометрию. Наоборот, в самой геометрии непрерывность линии определяется с помощью понятия непрерывной функции. Во-вторых, в самом анализе аналитическое исследование должно предшествовать построению графика. В-третьих, непрерывность функций обычно устанавливается не по самому определению, а на основании рассматриваемых нами позже теорем, которые доказываются с использованием именно аналитического определения непрерывности. Геометрически их доказать невозможно. Обозначим $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где $a \in \overline{D}_f$.

Возможны следующие 4 случая:

1) А - существует, $f(a)$- не существует (рис. 5).

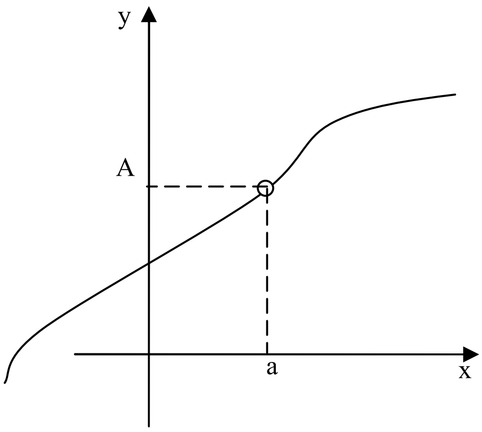


Рис. 5а

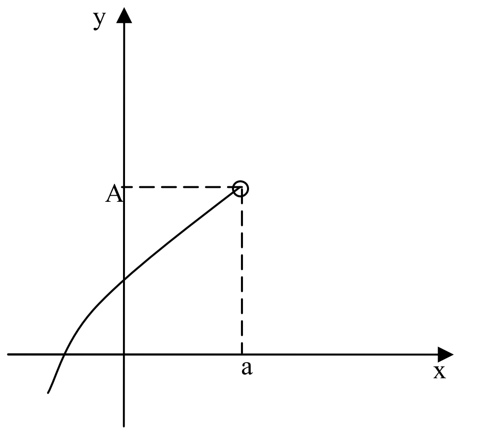


Рис. 5б

3) А – не существ

ует

$f(a)$ - существует (рис. 6) $f(a)$ -не существует (рис. 7)

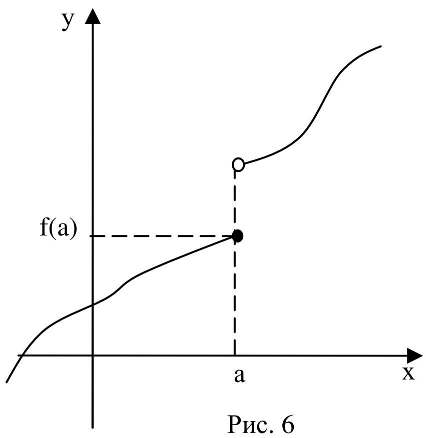


Рис. 6

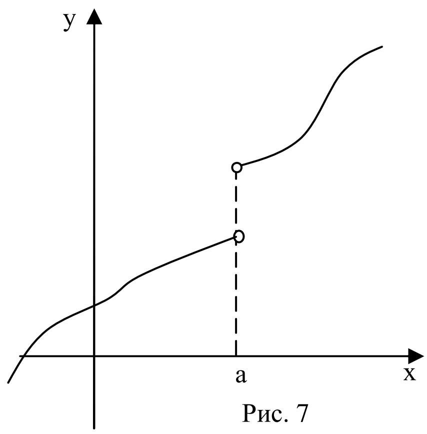


Рис. 7

4) А – существует, $f(a)$ - существует (рис. 8).

(Слайд 11)

В 4-ом случае верна теорема:

Теорема: Если в данной точке функция имеет как значение, так и предел, то они равны между собой, т.е.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

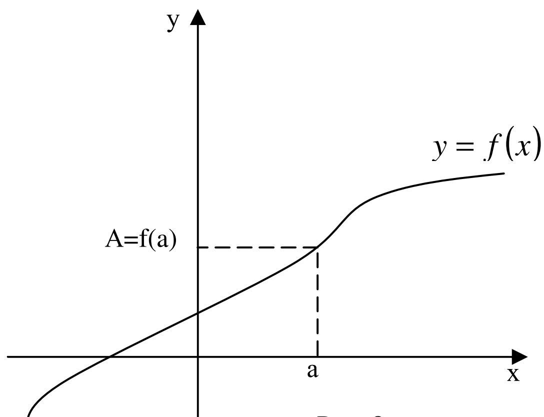


Рис. 8

Проведенная классификация показывает, что непрерывность графика получается только в последнем случае. Его и примем за определение:

Определение: Функция f называется непрерывной в точке a, если в этой точке существуют как ее значения, так и предел. При этом мы доказали, что предел и значение равны между собой, если они оба существуют.

Теорема 3. Все основные элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Теорема 4. Все элементарные функции непрерывны в своей области определения.

Односторонние пределы, признак существования предела функции в точке. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва и их классификация.

Определение: Функция называется непрерывной на некотором множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

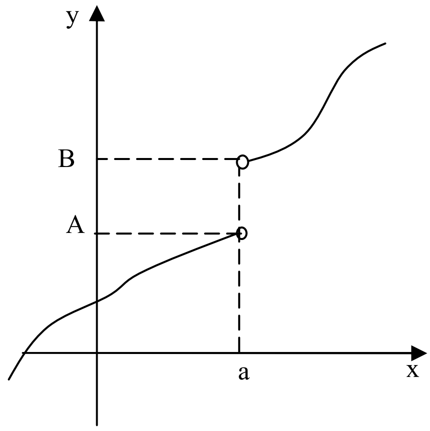


Рис. 9

Введем термины и обозначения.

Левый предел функции: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$.

Правый предел: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$.

Теорема: Если в (.) x_0 существуют односторонние пределы, они равны между собой и равны A, то в точке x_0 существует предел функции, и он равен A.

Классификация точек разрыва функции

(Слайд 12)

Определение: Пусть дана функция f с областью определения D_f. Тогда точка **a** называется **точкой разрыва** данной функции, если

1. $a \in \overline{D}_f$

2. Функция не является непрерывной в этой точке.

Проведем классификацию точек разрыва.

Определение: Если функция в точке разрыва имеет конечные односторонние пределы, то в этом случае разрыв функции называется разрывом **1-ого рода** или **скачком** (рис.9, 10).

В частности, скачком называется **устранимым** разрывом, если односторонние пределы равны между собой (рис.10). Разрыв этот называется устранимым потому, что функция в данной точке является почти непрерывной. Действительно, достаточно изменить или приписать функции в данной точке значение, равное односторонним пределам, как новая функция станет непрерывной.

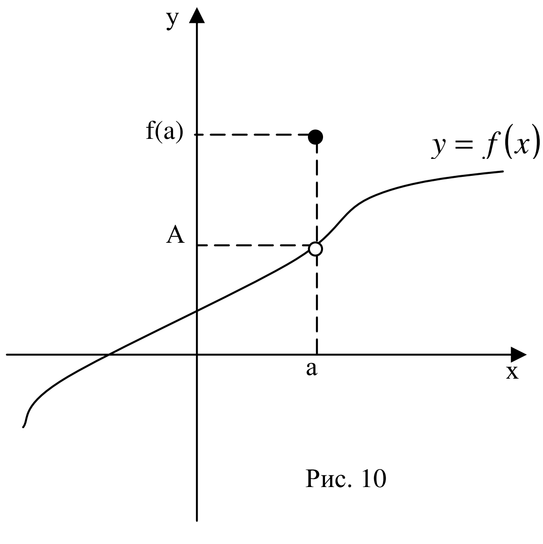


Рис. 10

Определение. Точка **a** называется точкой разрыва **2-ого рода**, если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или вообще не существует.

1.5 Лекция 5-6 (Л-5-6).
Тема: **Производная функции в точке, ее геометрический, экономический, физический смысл, правила дифференцирования, приложения (Презентация «Производная функции в точке, ее геометрический, экономический, физический смысл, правила дифференцирования, приложения»)**

1.5.1 Вопросы лекции:

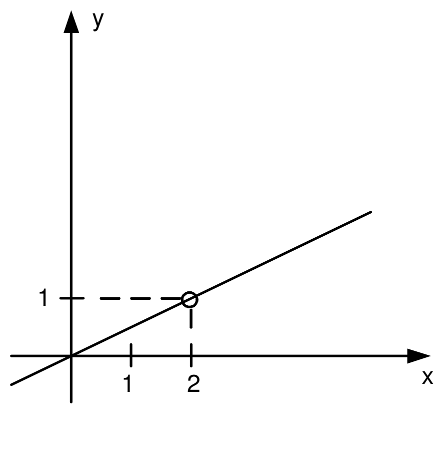
1. Производная функции в точке, ее геометрический, экономический, физический смысл.
2.Свойства дифференцируемых функций. Правила дифференцирования, дифференцирование сложной функции.
3. Экстремумы функции, условия существования экстремума.
4. Теорема о монотонности дифференцируемой функции.
5. Точка перегиба, исследование формы кривой.
6. Асимптоты графика функции. Полное исследование функции методами дифференциального исчисления.

1.5.2. Краткое содержание вопросов:

1. Производная функции в точке, ее геометрический, экономический, физический смысл.

В дальнейшем нам часто придется рассматривать изменение (обычно небольшое) переменной величины вблизи некоторого фиксированного ее значения, принимаемого за исходное.

Разность между новым, полученным в результате изменения, значением переменной величины и исходным, начальным («старым») ее значением называют **приращением** переменной и обозначают греческой буквой Δ (дельта).



Если задана некоторая функция $y=f(x)$, то, очевидно, всякому приращению аргумента Δx соответствует определенное приращение функции Δy. Тогда «старые» значения переменных будут x; $y=f(x)$, а «новые» (наращенные) значения: $x+\Delta x$; $f(x+\Delta x)$.

Пусть, например, задана функция $y=f(x)=6x-x^2$. Исходные значения переменных: $x=2$, $y=f(2)=6\cdot 2-2^2=8$. Придадим x приращение $\Delta x=0{,}1$. Тогда новое значение аргумента: $x+\Delta x=2{,}1$, а новое значение функции:

$f(x+\Delta x)=f(2{,}1)=6\cdot 2{,}1-2{,}1^2=8{,}19$, откуда $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=8{,}19-8=0{,}19$.

Возьмем для той же функции исходные значения $x=3$ и $\Delta x=1$, тогда $x+\Delta x=4$, $y=f(3)=6\cdot 3-3^2=9$, $f(4)=6\cdot 4-4^2=8$, откуда $\Delta y=8-9=-1$.Заметим, что отрицательное приращение функции при положительном приращении аргумента Δx означает, что функция убывает при данном значении x .

Выше мы вычислили численные значения приращений функции при заданных численных значениях аргумента. В теоретических вопросах часто нужно находить общее выражение для приращения функции Δy.

Для этого следует:

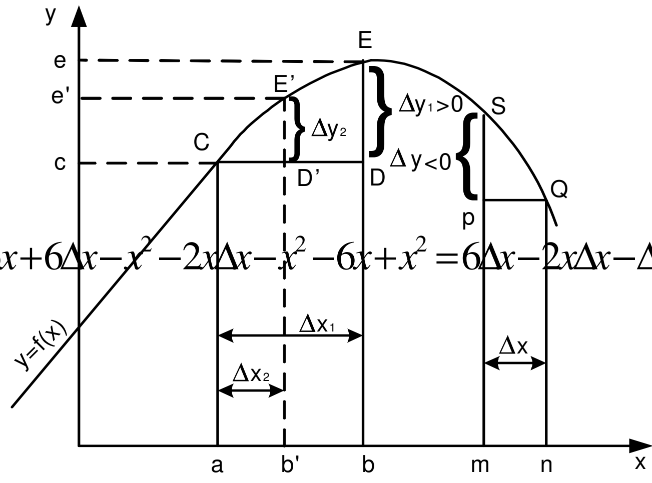
1) зафиксировать $x\in D(y)$;

2) придать аргументу приращение $\Delta x \neq 0$ такое, чтобы $(x+\Delta x) \in D(y)$;

3) записать $y(x)=f(x)$ и $y(x+\Delta x)=f(x+\Delta x)$;

4) найти $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Для рассмотренной выше функции получим:



$$\Delta y = 6(x+\Delta x)-(x+\Delta x)^2-(6x-x^2)=6x+6\Delta x-x^2-2x\Delta x-\Delta x^2-6x+x^2=6\Delta x-2x\Delta x-\Delta x^2$$

$\Delta y=(6-2x)\Delta x-\Delta x^2$.

Из этого общего выражения для Δy мы можем, в частности, получить оба найденные нами выше численные его значения. В самом деле, положив в формуле $x=2$ и $\Delta x=0{,}1$, получим $\Delta y=0{,}19$, а положив $x=3$ и $\Delta x=1$, получим $\Delta y=-1$.

Геометрическое изображение приращения функции показано на рис.2

Задачи, приводящие к понятию производной (Слайд 3-4)

1. Задача о касательной

Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат график непрерывной функции $y=f(x)$ и любую точку $M_0(x_0;f(x_0))$, принадлежащую графику.

Придадим аргументу x в точке x_0 произвольное приращение $\Delta x \neq 0$. На графике получим точку $M(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$. Через точки M_0 и M проведем секущую, в точке M_0 проведем касательную к графику функции.

Из школьного курса нам известно определение кас Рис.2 окружности, как прямой линии имеющей с окружностью единственную общую точку. Но в общем случае это определение неверно.

Дадим точное определение касательной к кривой. Устремим Δx к нулю. Тогда точка М, двигаясь по кривой, будет приближаться к точке M_0, остающейся неподвижной. Положение секущей будет изменяться: секущая будет стремиться занять положение касательной. Если бы точка М совместилась с точкой M_0, то секущая «превратилась» бы в касательную.

Угловой коэффициент секущей ($k_{сек}$) будет стремиться к угловому коэффициенту касательной ($k_{кас}$), т.е. $k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{сек}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник M_0NM:

$tg\alpha = \dfrac{NM}{M_0N} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Известно, что угловой коэффициент секущей равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси ОХ.

Тогда $k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k_{сек} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел существует и конечен.

Таким образом, можно сформулировать определение: касательной к кривой, проведенной в точке x_0, называется прямая линия, имеющая с кривой единственную общую точку, угловой коэффициент которой равен конечному пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю, т.е.

$$k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Задача о мгновенной скорости

Пусть материальная точка движется по закону $S=S(t)$, где S – пройденный путь, t – время. Найдем скорость движения в момент времени t_0 (мгновенная скорость).

Зафиксируем момент времени t_0, придадим аргументу t в точке t_0 произвольное приращение $\Delta t\neq 0$. Функция $S=S(t)$ получит приращение $\Delta S=S(t_0+\Delta t)-S(t_0)$. За промежуток времени Δt средняя скорость точки будет $V_{ср}=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Устремим Δt к нулю. Чем меньше Δt, тем меньше средняя скорость отличается от скорости в момент времени t_0. Поэтому под скоростью точки в момент времени t_0 (мгновенная скорость) понимается предел средней скорости за промежуток от t_0 до $t_0+\Delta t$, когда $\Delta t\to 0$, т.е. $V=\lim\limits_{\Delta t\to 0}V_{ср}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

В первой и во второй задачах, а также во многих других, мы приходим к необходимости вычислять пределы определенного вида, а именно $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Регулярное использование этого предела повлекло за собой необходимость введения нового понятия – понятие производной.

Понятие производной. Геометрический и механический смысл производной

Производной функции в точке x_0 называется число, равное пределу отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx, при условии, что $\Delta x\to 0$, т.е. $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Производная функции имеет несколько обозначений: y', $f'(x)$. Процесс нахождения производной функции называется **дифференцированием** этой функции.

Из задачи о касательной вытекает геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой y=f(x) в точке x_0, $k_{кас}=f'(x)$.

Из задачи о мгновенной скорости следует механический смысл производной: производная пути по времени - $S'(t_0)$ - есть скорость точки в момент времени t_0.

Функция, имеющая производную в точке x_0 называется дифференцируемой в этой точке. Функция называется дифференцируемой на интервале (a; b), если она дифференцируема в каждой точке интервала.

Пример 1. Найдем производную для функции $y=x^2$ по определению.

Зафиксируем $x\in D(y)$. Придадим аргументу x приращение $\Delta x\neq 0$,

$(x+\Delta x)\in D(y)$. Составим приращение функции

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$$

Найдем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x=y'$.

2.Свойства дифференцируемых функций. Правила дифференцирования, дифференцирование сложной функции (Слайд 5-7)

Таблица производных элементарных функций

1) $\left(x^k\right)'=k\cdot x^{k-1}$

2) $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$

4) $\left(a^x\right)'=a^x\cdot\ln a$

5) $\left(e^{x}\right)^{/}=e^{x}$ 6) $(\sin x)^{/}=\cos x$

7) $(\cos x)^{/}=-\sin x$ 8) $(tgx)^{/}=\dfrac{1}{\cos^{2}x}$

9) $(ctgx)^{/}=-\dfrac{1}{\sin^{2}x}$ 10) $(\arcsin x)^{/}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

11) $(\arccos x)^{/}=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$ 12) $(arctgx)^{/}=\dfrac{1}{1+x^{2}}$

13) $(arcctgx)^{/}=-\dfrac{1}{1+x^{2}}$ 14) $(\log_{a}x)^{/}=\dfrac{1}{x\ln a}$

Кроме таблицы производных основных элементарных функций при нахождении производных пользуются следующими правилами:

(c=const, u=u(x), v=v(x)) 1) $c'=0$ 2) $(u\pm v)'=u'\pm v'$ 3) $(cu)'=c\cdot u'$

4) $(uv)'=u'v+uv'$ 5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)^{/}=\dfrac{u'v-uv'}{v^{2}},v\neq 0$

Установим связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции следующей **теоремой**: если функция *y=f(x)* дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна. Обратная теорема неверна.

Например, функция $y=|x|$, непрерывна в точке $x=0$, но не дифференцируема в этой точке. Почему мы должны заключить, что производная в точке $x=0$ не существует?

Производной второго порядка или просто второй производной функции *y=f(x)* называется производная от ее производной $y'=f'(x)$, т.е. $y''=(y')'$ или $f''(x)=(f'(x))'$.

Аналогично, производной третьего порядка или третьей производной данной функции называется производная от ее второй производной.

Вообще, производной *n*-го порядка или *n*-ой производной от функции *y=f(x)* называется производная от ее (*n-1*)-ой производной.

Для производной *n*-го порядка принято обозначение: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$.

Пример. Дана функция *y=tgx*. Найти y''.

$$y'=\frac{1}{\cos^{2}x}\ ;\qquad y''=(y')'=\left(\frac{1}{\cos^{2}x}\right)'=-\frac{2(-\sin x)}{\cos^{3}x}=\frac{2\sin x}{\cos^{3}x}$$

Производная сложной функции

Пусть переменная *y* есть функция от переменной *u(y=f(u))*, а переменная *u* в свою очередь есть функция от независимой переменной *x: u=z(x)*. Тогда *y* называется функцией от функции или сложной функцией *y=f(z(x))*.

Производная сложной функции *y=f(z(x))* находится по правилу:

$$y'=f_{z}^{'}\cdot z_{x}^{'}.$$

Например: 1) $y=3x^{4}\quad y'=3\cdot 4x^{3}=12x^{3}$

2) $y=3\sqrt[5]{x^{3}}+x-1\Rightarrow y=5x^{\frac{3}{5}}+x-1\quad y'=5\cdot\dfrac{3}{5}x^{\frac{2}{5}}+1=3x^{\frac{2}{5}}+1=\dfrac{3}{\sqrt[5]{x^{2}}}+1$

3) $y=(x^{2}-5x+8)^{6}\quad z=x^{2}-5x+8\Rightarrow y=z^{6}$

$$y'=6z^{5}z'=6(x^{2}-5x+8)^{5}(x^{2}-5x+8)'=6(x^{2}-5x+8)^{5}(2x-5)$$

3. Экстремумы функции, условия существования экстремума (Слайд 8-11)

Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на интервале $(a;b)$, если для любых значений x_1 и x_2 аргумента x, таких что $a<x_1<x_2<b$ выполняется неравенство $f(x_2)>f(x_1)$ $(f(x_2)<f(x_1))$.

Если в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x\neq x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ или $f(x)>f(x_0)$, то точка x_0 называется точкой экстремума функции $f(x)$ (соответственно точкой максимума или минимума).

Необходимое условие экстремума: Если функции $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум и дифференцируема в этой точке, то первая производная $f'(x_0)$ равна нулю. Таким образом, экстремум может наблюдаться в точках, в которых $f'(x_0)=0$ или не существует.

Достаточное условие экстремума: Если x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, то ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус — при максимуме, с минуса на плюс - при минимуме.

4. Теорема о монотонности дифференцируемой функции.

Для нахождения интервалов возрастания и убывания функции нужно пользоваться **достаточными признаками монотонности**:

Если **производная дифференцируемой функции положительна** (**отрицательна**) на некотором интервале и стационарные точки (те в которых $f'(x)=0$) не заполняют сплошь никакого отрезка, то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

5. Точка перегиба, исследование формы кривой.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию $f''(x)>0$. Тогда кривая $y= f(x)$ выпукла вниз в точке с абсциссой x_0. Если же $f''(x)<0$, то кривая $y=f(x)$ в этой точке выпукла вверх.

Точка с абсциссой x_0 называется **точкой перегиба** кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: если x_0 - точка перегиба кривой $y=f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ либо равна нулю, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба: x_0 является точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если в достаточно малой окрестности точки x_0 при переходе через точку x_0 вторая производная меняет знак.

6. Асимптоты графика функции. Полное исследование функции методами дифференциального исчисления.

Прямая $y_{ac}=\kappa x+b$ называется наклонной асимптотой кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $(x;f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x\to\infty$. При этом

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

При k=0 имеем горизонтальную асимптоту: $y=b$.

Заметим, что если не существует хотя бы один из пределов, определяющих κ и b, то асимптоты нет.

Если $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, то прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции.

Общая схема исследования функции и построения ее графика.

I. Элементарное исследование:

1) найти область определения функции;
2) исследовать функцию на четность (нечетность);
3) исследовать функцию на периодичность;
4) определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечения графика с координатными осями.

II. Исследование графика функции по первой производной:

1) найти *y'(x);*

2) используя необходимый признак существования экстремума найти точки, «подозрительные» на экстремум, т.е. точки в которых *y'(x)=0* или *y'(x)* не существует;

3) нанести критические точки на область определения и найти знак производной во всех получившихся интервалах;

4) используя признаки монотонности определить характер монотонности функции на каждом интервале;

5) используя достаточный признак существования экстремума установить наличие экстремума и их характер;

6) вычислить значение функции в точках экстремума, если они есть.

III. Исследование графика функции по второй производной:

1) найти *y'' (x);*

2) используя необходимый признак существования точек перегиба, найти точки «подозрительные» на перегиб, т.е. точки в которых *y''(x)=0* или *y''(x)* не существует;

3) нанести полученные точки на область определения и найти знак второй производной в каждом из получившихся интервалов;

4) используя теорему о форме кривой установить характер выпуклости (вогнутости) графика функции на каждом промежутке;

5) используя достаточный признак существования точек перегиба установить их наличие;

6) вычислить значения функции в абсциссах точек перегиба.

IV. Исследовать поведение функции на границах области определения.

V. Исследовать кривую *y=f(x)* на наличие асимптот и указать область значений функции.

VI.Построить график функции.

Если исследование произведено без ошибок, то результаты всех этапов должны согласовываться друг с другом. Если же согласование отсутствует, необходимо проверить правильность результатов отдельных этапов и исправить ошибки (Слайд 12-15).

Пример. Исследовать функцию $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$ и построить ее график.

1. Элементарное исследование.

1) Областью определения данной функции является множество всех действительных чисел: *D(y)=R*.

2),3) Данная функция является элементарной, поэтому непрерывна на всей области определения, асимптот не имеет, не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

4) Для определения точки пересечения исследуемой кривой с осью OX следует решить уравнение $\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5=0$. Из-за отсутствия целочисленных корней этого уравнения его решение громоздко (хотя и может быть найдено по формулам Кардано). Для нахождения точки пересечения графика с осью *OY* подставим в уравнение функции *x*=0, получим точку А(0;5).

2. Исследование по первой производной

Для нахождения интервалов возрастания (убывания) функции определим интервалы знакопостоянства ее первой производной $y'=x^2-2x-3$ (рис.2).

Корнями производной являются точки x_1=-1 и x_2=3 (критические точки).

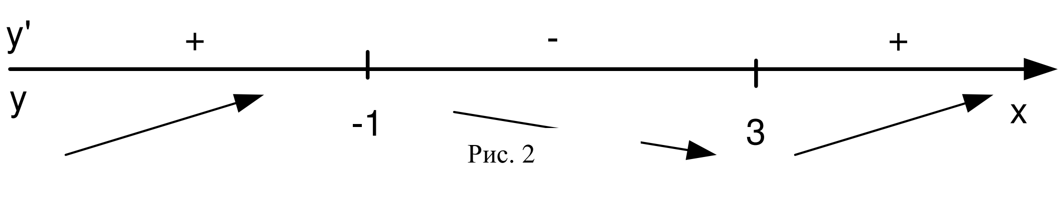


Рис. 2

Промежутки знакопостоянства производной определяются методом интервалов. Данная функция возрастает на (-∞;-1) и (3;+∞) и убывает на

(-1;3). При переходе через точку $x_1=-1$ y' меняет знак с «+» на «-», поэтому в этой точке функция имеет максимум $y_{\max} = y(-1) = 6\frac{2}{3}$. Значит, В(-1; $6\frac{2}{3}$) – точка максимума. Так как при переходе через точку $x_2=3$ у' меняет знак с «-» на «+», то $C(3;-4)$ – точка минимума.

3. Исследование по второй производной: $y''=2x-2$ $y''=0$ при $x=1$ (точка «подозрительная» на перегиб)

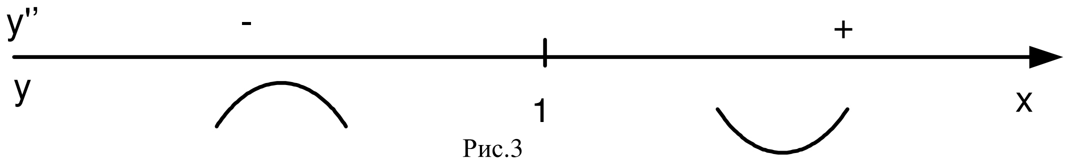


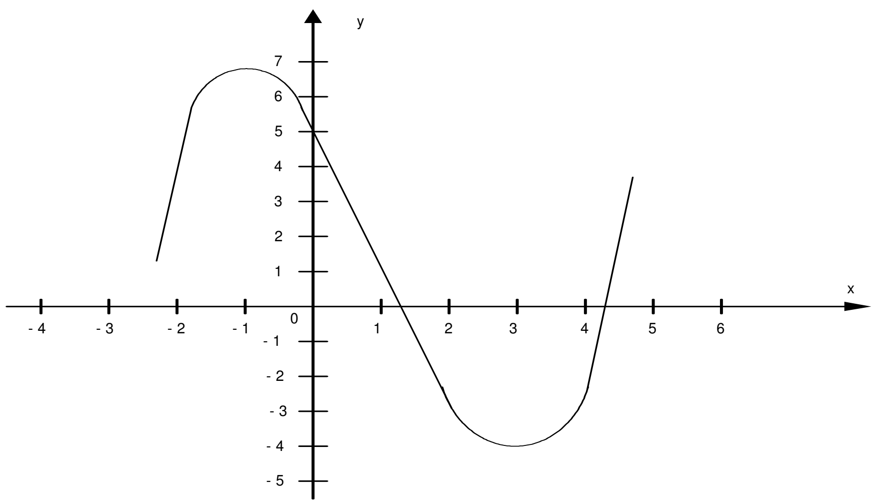
Рис.3

Так как при переходе через точку $x=1$ y'' меняет знак, то $x=1$ есть абсцисса точки перегиба графика. D (1; $1\frac{1}{3}$) – точка перегиба.

Результаты исследования сведем в таблицу:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	(1;3)	3	$(3;+\infty)$
y	возрастает выпукла	max	убывает выпукла	перегиб	убывает вогнута	min	возрастает вогнута
y'	+	0	−	−	−	0	+
y''	−	−	−	0	+	+	+

Строим график исследуемой функции:



1.6 Лекция 7 (Л-7)

Тема: **Первообразная функции, неопределенный интеграл, его свойства, основные методы интегрирования (Презентация «Первообразная функции, неопределенный интеграл, его свойства, основные методы интегрирования»)**

1.6.1 Вопросы лекции:

1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его геометрический смысл
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Основные методы интегрирования

1.6.2. Краткое содержание вопросов:

1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его геометрический смысл

Основная задача дифференциального исчисления состоит в нахождении дифференциала данной функции или ее производной. Интегральное исчисление решает обратную задачу: по заданному дифференциалу, а, следовательно, и производной неизвестной функции *F(x),* требуется определить эту функцию. Иными словами, имея выражение

$$dF(x) = f(x)dx \qquad (1)$$

или соответственно

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

где *f(x)* – известная функция, нужно найти функцию *F(x).* Искомая функция *F(x)* называется при этом **первообразной функцией** по отношению к функции *f(x).* Для простоты мы будем предполагать, что равенство (1) выполняется на некотором конечном или бесконечном промежутке.

Определение: Первообразной функцией для данной функции *f(x)* на данном промежутке называется такая функция *F(x),* производная которой равна *f(x)* или дифференциал которой равен *f(x)dx* на рассматриваемом промежутке (Слайд 3)

Например, одной из первообразных функций для функции $3x^2$ будет x^3, ибо $(x^3)' = 3x^2$. Первообразная функция не единственна, так как $(x^3+1)' = 3x^2, (x^3-5)' = 3x^2$ и т.д., и поэтому функции x^3+1, x^3-5 и т.п. также являются первообразными для функции $3x^2$. Следовательно, данная функция имеет бесчисленное множество первообразных.

В нашем примере каждые две первообразные отличались друг от друга на некоторое постоянное слагаемое. Покажем, что это будет иметь место и в общем случае (Слайд 4).

Теорема: Две различные первообразные одной и той же функции, определенной на некотором промежутке, отличаются друг от друга на этом промежутке на постоянное слагаемое.

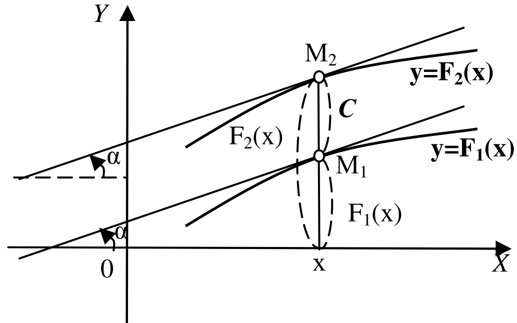
Доказательство: В самом деле, пусть *f(x)* – некоторая функция, определенная на промежутке $\langle a, b \rangle$, и $F_1(x)$, $F_2(x)$ – ее первообразные, т.е.

$$F_1'(x) = f(x) \text{ и } F_2'(x) = f(x).$$

Отсюда $F_1'(x) = F_2'(x)$.

Но если две функции имеют одинаковые производные, то эти функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое. Следовательно,

$$F_1(x) - F_2(x) = C,$$



где C – постоянная величина. Теорема доказана.

Рассмотрим геометрическую иллюстрацию. Если $y = F_1(x)$ и $Y = F_2(x)$ - первообразные одной и той же функции $f(x)$, то касательные к их графикам в точках с общей абсциссой x параллельны между собой (рис. 1):

$$tg\alpha = F_1'(x) = F_2'(x) = f(x).$$

В таком случае расстояние между этими кривыми вдоль оси Oy остается постоянным: $F_2(x) - F_1(x) = C$, т.е. эти кривые в некотором смысле «параллельны» друг другу.

Следствие: Прибавляя к какой-либо первообразной функции $f(x)$, определенной на промежутке $\langle a,b\rangle$, все возможные постоянные C, мы получим все первообразные для функции $f(x)$.

В самом деле, если $F(x)$ есть первообразная функция для $f(x)$, то функция $F(x)+C$, где C- любая постоянная, также будет первообразной функции $f(x)$, так как $\left[F(x)+C\right]' = F'(x)+C' = f(x)$.

С другой стороны, мы доказали, что каждая первообразная функции $f(x)$ может быть получена из функции $F(x)$ путем прибавления к ней надлежащим образом подобранного постоянного слагаемого C.

Следовательно, выражение $F(x) + C$, где $C \in (-\infty;+\infty)$, (2)

где $F(x)$ – какая-либо первообразная для функции $f(x)$, исчерпывает всю совокупность первообразных для данной функции $f(x)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, если явно не оговорено противное, что рассматриваемая функция $f(x)$ определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном промежутке $\langle a,b\rangle$.

Введем теперь основное понятие интегрального исчисления – понятие неопределенного интеграла. (Слайд 5).

Определение: Общее выражение для всех первообразных данной непрерывной функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ или от дифференциального выражения $f(x)dx$ и обозначается символом $\int \mathrm{f(x)dx}$.

При этом функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а выражение $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением.

Согласно определению неопределенного интеграла можно записать

$$\int \mathrm{f(x)dx} = F(x) + C, \qquad (3)$$

где $F'(x) = f(x)$, постоянная C может принимать любое значение, и поэтому называется произвольной постоянной.

Пример. Как мы видели, для функции $3x^2$ одной из первообразных является функция x^3. Поэтому $\int 3x^2dx = x^3 + C$.

Геометрически неопределенный интеграл $y=F(x)+C$ представляет собой семейство «параллельных» кривых (рис.2).

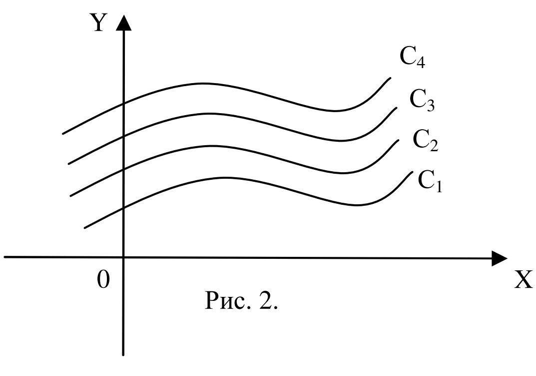


Рис. 2.

2. Свойства неопределенного интеграла(Слайд 6-7).

Основные свойства неопределенного интеграла

Опираясь на формулу (3), выведем основные свойства неопределенного интеграла.

I. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Это свойство непосредственно вытекает из определения неопределенного интеграла.

Таким образом, имеем

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \quad \text{и} \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \qquad (4)$$

II. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

В самом деле, пусть $\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx$, где функция $\varphi'(x)$ непрерывна. Функция $\varphi(x)$, очевидно, является первообразной для $\varphi'(x)$. Поэтому имеем

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C. \qquad (5)$$

Замечание: В формулах (4) и (5) знаки d и $\int$, следующие друг за другом в том или другом порядке, взаимно уничтожают друг друга (если не учитывать постоянного слагаемого). В этом смысле дифференцирование и интегрирование и являются взаимно обратными математическими операциями.

III. Отличный от нуля постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла, т.е. если постоянная $A \neq 0$, то

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx. \qquad (6)$$

В самом деле, пусть $F(x)$- первообразная для $f(x)$. В силу формулы (3) имеем:

$$A\int f(x)dx = A[F(x) + C] = AF(x) + C_1, \qquad (7)$$

где $C_1=AC$, причем C и C_1 – произвольные постоянные при $A \neq 0$. Но $AF(x)$ есть первообразная для функции $Af(x)$, так как

$$[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x).$$

Поэтому из формулы (7) получаем требуемую формулу (6).

Замечание: При $A=0$ формула (3) неверна, так как левая часть ее представляет собой произвольную постоянную, а правая часть тождественна равна нулю.

IV. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от этих функций, т.е. если, например, функция $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ непрерывны в интервале (a,b), то

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx \quad \text{при } x \in (a,b). \qquad (8)$$

Действительно, пусть $F(x)$, $G(x)$, $H(x)$ – первообразные соответственно функций $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. На основании формулы (3) имеем:

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx = [F(x) + C_1] + [G(x) + C_2] - [H(x) + C_3] =$$

$$= [F(x) + G(x) - H(x)] + C, \qquad (9)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные и $C=C_1+C_2-C_3$, очевидно, также является произвольной постоянной. Но функция $F(x)+G(x)-H(x)$ есть первообразная для функции $f(x)+g(x)-h(x)$, так как

$$[F(x) + G(x) - H(x)]' = F'(x) + G'(x) - H'(x) = f(x) + g(x) - h(x).$$

Следовательно,

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)]dx = F(x) + G(x) - H(x) + C. \qquad (10)$$

Из формул (9) и (10) вытекает равенство (8).

Зная формулы для производных основных элементарных функций, можно составить таблицу неопределенных интегралов (первообразных), которую мы дополним еще несколькими часто встречающимися интегралами.

Таблица основных интегралов (ТОИ) (Слайд 8).

1. $\int 1\cdot dx=\int dx=x+C$

2. $\int x^{a}dx=\dfrac{x^{a+1}}{a+1}+C$, $a\neq -1$ $\left(\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C\right)$

3. $\int \dfrac{dx}{x}=ln|x|+C$

4. $\int a^{x}dx=\dfrac{a^{x}}{ln\,a}+C$ $\left(\int e^{x}dx=e^{x}+C\right)$

5. $\int cos\,xdx=sin\,x+C$

6. $\int sin\,dx=-cos\,x+C$

7. $\int \dfrac{dx}{cos^{2}x}=\ tgx+C$

8. $\int \dfrac{dx}{sin^{2}x}=-ctgx+C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=arcsin\,x+C$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^{2}}=arctgx+C$

11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=arcsin\dfrac{x}{a}+C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm a}}=ln\left|x+\sqrt{x^{2}\pm a}\right|+C,\forall a\in R$

13. $\int \dfrac{dx}{a^{2}+x^{2}}=\dfrac{1}{a}arctg\,\dfrac{x}{a}+C$

14. $\int \dfrac{dx}{sin\,x}=ln\left|tg\,\dfrac{x}{2}\right|+C$

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования с помощью этой таблицы и свойств неопределенных интегралов обычно называют **методом непосредственного интегрирования.** (Слайд 10-11).

Примеры:

1. $\int \dfrac{(x-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}{x^{2}\sqrt[3]{x}}dx=$ (перемножаем скобки в числителе)=

$\int \dfrac{x+x\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{x^{2}\sqrt[3]{x}}dx=$ (записываем «корни» в виде степеней с дробными показателями)= $\int \dfrac{x+x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{7}{3}}}dx=$ (делим почленно числитель на знаменатель)=

$\int (x^{-\frac{4}{3}} + x^{-\frac{5}{6}} - 2x^{-\frac{11}{6}})dx =$ (применяем свойство 4 и формулу 2 из ТОИ)=
$\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + \frac{x^{\frac{1}{6}}}{\frac{1}{6}} - 2\frac{x^{-\frac{5}{6}}}{-\frac{5}{6}} + C = -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 6\sqrt[6]{x} + \frac{12}{5\sqrt[6]{x^5}} + C.$

2. $\int \frac{1}{sin^2 x\, cos^2 x} dx = \left[sin^2 x + cos^2 x = 1\right] = \int \frac{sin^2 x + cos^2 x}{sin^2 x\, cos^2 x} dx =$ (делим почленно числитель на знаменатель) = $\int \frac{sin^2 xdx}{sin^2 x\, cos^2 x} + \int \frac{cos^2 xdx}{sin^2 x\, cos^2 x} =$ (применяем формулы 7,8 ТОИ)=*tgx-ctgx+C*

3.
$\int tg^2 xdx = \left[1 + tg^2 x = \frac{1}{cos^2 x}\right] = \int (1 - \frac{1}{cos^2 x})dx = \int 1 \cdot dx - \int \frac{1}{cos^2 x} dx = x - tgx + C$

4. $\int \frac{3dx}{\sqrt{x^2-9}} = 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} =$ (по формуле 12 ТОИ)=$3ln|x + \sqrt{x^2-9}| + C$.

Метод **интегрирования по частям** основан на применении следующей формулы: $\int udv = uv - \int vdu$, где $u(x), v(x)$- непрерывные и дифференцируемые на промежутке X функции. (Слайд 12-14)

Эта формула обычно бывает полезна при интегрировании функций следующего вида:

$(ax+b)^k \sin \beta x$ ($u=(ax+b)^k$)

$(ax+b)^k \cos \beta x$ ($u=(ax+b)^k$)

$(ax+b)^k \ln x$ ($u=lnx$)

$(ax+b)^k e^{\beta x}$ ($u=(ax+b)^k$)

$x^k arctgx$ ($u=arctgx$)

$x^k \arcsin x$ ($u=arcsinx$)

Примеры:

1. $\int x^3\, ln\, xdx = \begin{vmatrix} u = ln\, x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^3 dx & v = \frac{1}{4}x^4 \end{vmatrix} =$ (подставляем в правую часть формулы)

$= \frac{x^4}{4} ln\, x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{4} x^4\, ln\, x - \frac{1}{4}\int x^3 dx = \frac{1}{4} x^4\, ln\, x - \frac{1}{16} x^4 + C.$

Одним из самых сильных методов интегрирования является **метод подстановки.** В его основе лежит легко проверяемая формула:

$$\int g(\omega(x))\omega'(x)dx = \begin{vmatrix} t = \omega(x) \\ dt = \omega'(x)dx \end{vmatrix} = \int g(t)dt = G(t) + C = G(\omega(x)) + C$$

Эту формулу следует применять тогда, когда первообразная для *g(t)* известна или легко находится. (Слайд 15-16)

Примеры:

1. $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx = \left| \begin{matrix} t = arctgx \\ dt = \frac{1}{1+x^2}dx \end{matrix} \right| = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C =$ (делаем обратную подстановку) $= \frac{1}{4} arctg^4 x + C.$

2. $\int \frac{x^3dx}{x^8+9} = \left| \begin{matrix} t = x^4 \\ dt = 4x^3dx \end{matrix} \right| =$ (умножаем числитель и знаменатель на 4)= $= \frac{1}{4}\int \frac{4x^3dx}{x^8+9} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2+9} =$ (формула 13 ТОИ)$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} arctg\frac{t}{3} + C = \frac{1}{12} arctg \frac{x^4}{3} + C.$

Лекция 8 (Л-8)

Тема: **Определенный интеграл, его свойства, вычисление (Презентация «Определенный интеграл, его свойства, вычисление»)**

1.7.1 Вопросы лекции:

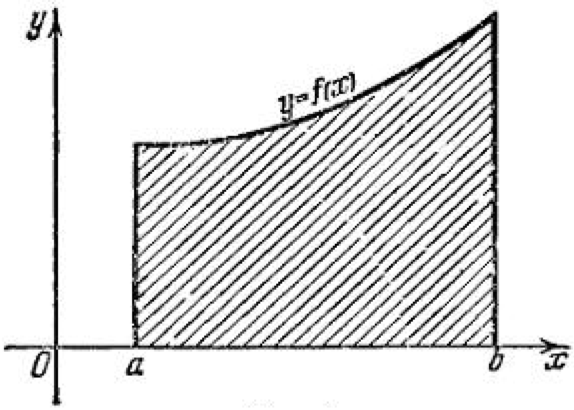
1. Определенный интеграл, его свойства.
2. Основные методы нахождения определенного интеграла.

1.7.2. Краткое содержание вопросов:

1. Определенный интеграл, его свойства.

Задача о площади криволинейной трапеции (Слайд 3).

Пусть на плоскости введена прямоугольная декартова система координат xOy на отрезке $[a,b]$, где b>a, определена непрерывная неотрицательная функция $y = f(x)$, т.е. $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Фигура aABb, ограниченная снизу отрезком оси Ox, сверху – дугой AB графика функции f, а слева и справа – отрезками прямых $x = a, \quad 0 \le y \le f(a)$ и $x = b, \quad 0 < y \le f(b)$, называется криволинейной трапецией. (Слайд 4-5)



Дадим определение площади криволинейной трапеции на aABb. Разобьем отрезок на n малых отрезков; абсциссы точек разбиения обозначим через $a < x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$ Набор точек деления $\{x_k\}\ (k = 1,2,...,n)$ назовем разбиением отрезка . Через точки разбиения проведем прямые $x = x_k$, параллельные оси Oy. Эти прямые разобьют криволинейную трапецию aABb на n узких полос, каждая из которых тоже является криволинейной трапецией с основанием

$[x_{k-1}, x_k]$. Площадь S трапеции aABb равна сумме площадей полос ее составляющих. Если n достаточно велико и все от

резки малы, то площадь каждой из полос можно заменить площадью соответствующего прямоугольника, которая вычисляется легко. На каждом отрезке выберем какую-нибудь точку c_k, вычислим значение $f(c_k)$ в этой точке и примем за высоту прямоугольника. В силу непрерывности функция мало изменяется на отрезках , если они малы.

Поэтому на таких отрезках ее можно считать постоянной и равной .

Так как площадь одной полосы приближенно равна площади прямоугольника $f(c_k)(x_k - x_{k-1})$, то для площади S криволинейной трапеции aABb получим приближенное равенство

$$S \approx S_n = \sum_{k-1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \text{, где } \Delta x_k = (x_k - x_{k-1}) \quad (1)$$

Приближенное равенство (1) тем точнее, чем меньше величина $d = \max_k \Delta x_k$. Величина d называется диаметром разбиения . По определению, *площадью криволинейной трапеции* называется предел суммы S_n площадей прямоугольников при стремлении диаметра разбиения к нулю, т.е.

$$S = \lim_{d \to 0} S_n = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \quad (2)$$

Следовательно, вычисление площади криволинейной трапеции приводит к вычислению предела суммы вида (2) при $d \to 0$. (Слайд 6)

Основные свойства определенного интеграла

При выводе основных свойств определенного интеграла мы будем исходить из формулы (13) Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F'(x)=f(x)$ при $x \in [a,b]$. (Слайд 7)

Пример. Найти интеграл от x^2 в пределах от 2 до 4.

Так как $\frac{1}{3}x^3$ есть первообразная для x^2, то согласно формуле (14) имеем

$$\int_2^4 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_2^4 = \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = 18\frac{2}{3}.$$

Заметим, что тот же результат мы получили бы, если бы использовали другую первообразную для x^2, например, $\frac{x^3}{3}+1$ или $\frac{x^3}{3}-2$.

Это явление носит общий характер.

Теорема: Определенный интеграл от непрерывной функции не зависит от выбора первообразной для подынтегральной функции.

(Слайд 8)

1. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt,$$

где *x, t* – любые переменные.

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю.

Проверим по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0.$$

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет свой знак на противоположный.

В самом деле, переставляя пределы интегрирования, в силу формулы (13) имеем:

$$\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = -\int_a^b f(x)dx.$$

4. Если промежуток интегрирования [*a,b*] разбит на конечное число частичных промежутков, то определенный интеграл, взятый по промежутку [*a,b*], равен сумме определенных интегралов, взятых по всем его частичным промежуткам.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.

Действительно, пусть *F(x)* – первообразная для *f(x)* на [*a,b*] и *A* – постоянная величина, тогда *A F(x)* есть первообразная для *Af(x)*, так как

$$[AF(x)]' = AF'(x) = Af(x).$$

Следовательно, имеем

$$\int_a^b Af(x)dx = AF(x)\Big|_a^b = AF(b) - AF(a) = A[F(b) - F(a)] = A\int_a^b f(x)dx.$$

6. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций.

7. Если подынтегральная функция определенного интеграла непрерывна и неотрицательна, а верхний предел интегрирования больше нижнего или равен ему, то определенный интеграл также неотрицателен.

Теорема о среднем: Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции при некотором промежуточном значении аргумента (предполагается, что верхний предел интегрирования больше нижнего).

2. Основные методы нахождения определенного интеграла.

Замена переменной в определенном интеграле (Слайд 9-10)

Пусть дан определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где *f(x)* – непрерывная на отрезке [*a,b*] функция. Допустим, по каким-то соображениям нам желательно ввести новую переменную *t*, связанную с прежней переменной *x* соотношением: $x=\varphi(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке [*a,b*] функция. Если при этом: 1) при изменении *t* от *α* до *β* переменная *x* меняется от *a* до *b*, т.е. $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$; 2) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на отрезке [*α,β*], то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta \mathrm{f}(\varphi(\mathrm{t}))\varphi'(\mathrm{t})\mathrm{dt}.$$

Замечание: При вычислении определенного интеграла с помощью замены переменной нет необходимости возвращаться к прежней переменной, достаточно лишь ввести новые пределы интегрирования.

Пример. Вычислить $\int\limits_0^3 x\sqrt{1+x}dx$.

$$\int\limits_0^3 x\sqrt{1+x}dx = \begin{vmatrix} t=\sqrt{1+x} \\ \tilde{o}=t^2-1 \\ dx=2tdt \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x=0 & x=3 \\ t=1 & t=2 \end{vmatrix} = \int\limits_1^2 \left(t^2-1\right)\cdot t\cdot 2tdt = 2\cdot\int\limits_1^2 \left(t^4-t^2\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right) = \frac{62}{5}-\frac{14}{3} = 7\frac{11}{15}.$$

Интегрирование по частям (Слайд 11-12)

Пусть *u=u(x), υ=υ(x)* – непрерывно дифференцируемые на отрезке [*a,b*] функции. Имеем: $d\left[u(x)\upsilon(x)\right] = \upsilon(x)du(x) + u(x)d\upsilon(x)$.

Интегрируя это равенство в пределах от *a* до *b* и учитывая, что $du(x) = u'(x)dx$ и, $d\upsilon(x) = \upsilon'(x)dx$,

Находим

$$u(x)\upsilon(x)\Big|_a^b = \int\limits_a^b \upsilon(x)u'(x)dx + \int\limits_a^b u(x)\upsilon'(x)dx.$$

Отсюда получаем формулу интегрирования по частям в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b u(x)\upsilon'(x)dx = u(b)\upsilon(b) - u(a)\upsilon(a) - \int\limits_a^b \upsilon(x)u'(x)dx.$$

Для краткости употребляется обозначение

$$u(b)\upsilon(b) - u(a)\upsilon(a) = u(x)\upsilon(x)\Big|_a^b.$$

Пример. Найти $\int\limits_0^{2\pi} x\cos xdx$.

$$\int\limits_0^{2\pi} x\cos xdx = \begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos xdx & v=\sin x \end{vmatrix} = x\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi}\sin xdx = .$$

$$= 2\pi\sin 2\pi - 0\cdot\sin 0 + \cos x\Big|_0^{2\pi} = \cos 2\pi - \cos 0 = 0$$

Лекция 9 (Л-9)

Тема: Приложения определенного интеграла (Презентация «Приложения определенного интеграла»)

1.8.1 Вопросы лекции:

1. Квадрируемые и кубируемые фигуры и тела. Вычисление площади плоской фигуры.
2. Вычисление объема тела вращения.

1.8.2. Краткое содержание вопросов:

1. Квадрируемые и кубируемые фигуры и тела. Вычисление площади плоской фигуры.

Формулы для нахождения площади плоской фигуры: (Слайд 3 -6)

в декартовой системе координат (рис.1) $$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx; \qquad (1)$$

в полярной системе координат (рис.2)

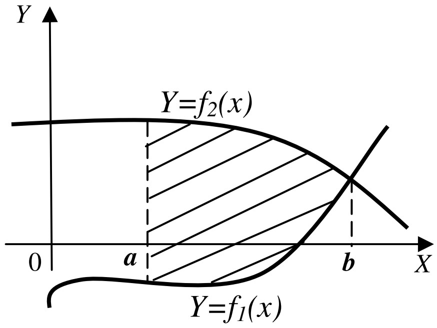


Рис. 1.

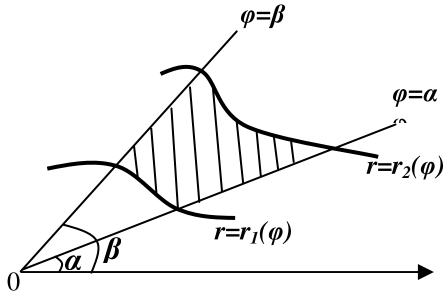
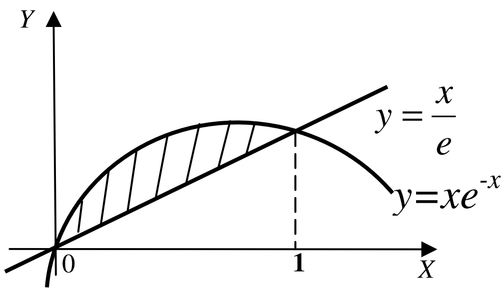


Рис. 2.

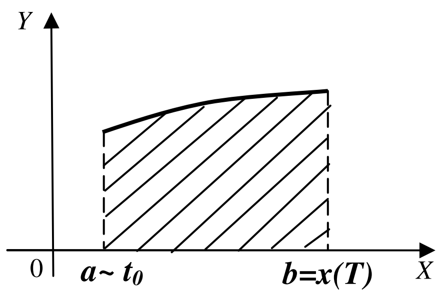
$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_2^2(\varphi)-r_1^2(\varphi))d\varphi; \qquad (2)$$

в случае параметрического задания кривой $S=\int_{t_0}^{T} y(t)x'(t)dt.$

1. Найти площадь области, ограниченной графиками функций $y=\frac{x}{e}$ и $y=xe^{-x}$.



Решение. Строим графики функций $y=\frac{x}{e}$ и $y=xe^{-x}$ в одной системе координат. При этом график функции $y=xe^{-x}$ строим, предварительно проведя ее полное исследование.



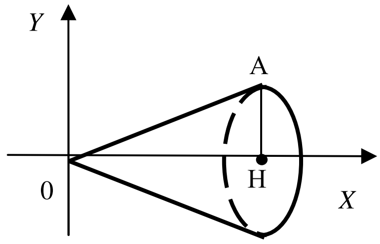
Находим точки пересечения кривых

$$\begin{cases} y=xe^{-x} \\ y=\dfrac{x}{e} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{e}=xe^{-x} \Rightarrow x\left(e^{-x}-\frac{1}{e}\right)=0.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ e^{-x}=e^{-1} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Площадь области находим по формуле (18): $S=\int\limits_0^1(xe^{-x}-\frac{x}{e})dx=\int\limits_0^1 xe^{-x}dx-\int\limits_0^1\frac{x}{e}dx$

Первый интеграл берется методом интегрирования по частям, второй интеграл табличный (предлагаем выполнить интегрирование самостоятельно). Окончательно $S=1-\frac{2}{e}-\frac{1}{2e}=\frac{2e-5}{2e}$ (кв. ед.).



2. Вычисление объема тела вращения. (Слайд 7-9)

Пусть T – тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг OX, тогда **объем тела *T*** определяется по формуле: $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$.

Пример. Найти объем прямого кругового конуса (радиус основания -R, высота-H), полученного вращением треугольника ОАН вокруг оси OX .

Решение: уравнение ОА: $Y=\frac{R}{H}x,$ следовательно

$$V=\pi\int\limits_0^H\frac{R^2x^2}{H^2}dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\int\limits_0^H x^2dx=\frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_0^H=\frac{1}{3}\pi R^2H(\,ед.^3\,).$$

Замечание: Если кривая *f(x)* задана параметрически или в полярной системе координат, то в определенном интеграле надо сделать замену переменных. При этом не следует забывать про **новые пределы интегрирования.**

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ ЗАНЯТИЙ

(НЕ ПРЕДУСМОТРЕНО РПД)

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

3.1 Практическое занятие 1-2 (ПЗ-1-2)

Тема: Элементы теории матриц и определителей

3.1.1 Задание для работы:

1.Классификация матриц
2. Арифметические действия над матрицами. Транспонирование матриц.
3. Вычисление определителей второго и третьего порядка

4. Миноры и алгебраические дополнения.
5. Вычисление определителей по теореме Муавра- Лапласа
6. Нахождение обратной матрицы

3.1.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Классификация матриц

Квадратная матрица, все элементы которой, кроме элементов главной диагонали равны нулю, называется **диагональной матрицей.**

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны между собой, называется **скалярной матрицей.**

Диагональная матрица, все ненулевые элементы которой равны 1, называется **единичной матрицей.**

$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ единичная матрица 3-его порядка

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой матрицей (0).**

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором (или вектор- столбец, или вектор-строка соответственно).**

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е.$(5)_{1\times1}$ есть 5.

Одноразмерные матрицы **равны между собой**, если равны все соответствующие элементы этих матриц.

2. Арифметические действия над матрицами. Транспонирование матриц.

Пример. Найти сумму матриц А и В, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+1 & 3-3 & 5+4 & 7+0 \\ 1+2 & 4+1 & 2+3 & 3-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Пример. Вычислить матрицу 2А + 5В, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$2A+5B=2\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{pmatrix}+5\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4&6\\4&2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&5&5\\5&10&15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&9&11\\9&12&17\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}2&9&11\\9&12&17\end{pmatrix}$

Пример. Найти произведение AB матрицы-строки $A=\begin{pmatrix}5&7&-2\end{pmatrix}$на матрицу $B=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&4&2\\-2&3&-1\end{pmatrix}$.

Решение: $\begin{pmatrix}5&7&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&1\\1&4&2\\-2&3&-1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}5\cdot2+7\cdot1+(-2)(-2)+5\cdot3+7\cdot4+(-2)\cdot3 & 5\cdot1+7\cdot2+(-2)(-1)\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}21&37&21\end{pmatrix}.$$

Ответ: матрица-строка размера (1 x 3) –(21 37 21).

Транспонирование матриц

Пример. Найти транспонированную матрицу для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&2&1\\3&-1&5\end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&3\\1&2&-1\\-2&1&5\end{pmatrix}.$$

3. Вычисление определителей второго, третьего порядка

Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}2&3\\1&4\end{vmatrix}=2\cdot4-3\cdot1=5.$

Ответ: 5.

б) $\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha\\-\cos\alpha&\sin\alpha\end{vmatrix}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Ответ: 1.

в)

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-1&1\\-1&0\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-1\end{vmatrix}=1-1+1=1$$

4. Миноры и алгебраические дополнения.

Найти миноры и алгебраические дополнения для элементов матрицы

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&2&1\\3&-1&5\end{pmatrix}.$$

Решение:

Для данной матрицы $A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\-1&5\end{vmatrix}=11;$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&1\\3&5\end{vmatrix}=-17;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&2\\3&-1\end{vmatrix}=-10;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-3;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=21;$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=6;\qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5;$$
$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-11;\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2.$$

5. Вычисление определителей по теореме Муавра- Лапласа

Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 6 & 10\\ 1 & 4 & 10 & 20\end{vmatrix}$

Решение:

Воспользуемся свойствами определителя. Из второй третьей, четвертой строки вычтем первую строку, полу чим определитель и разложение его по элементам 1-го столбца:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & 5 & 9\\ 0 & 3 & 9 & 19\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 9\\ 3 & 9 & 19\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}5 & 9\\ 9 & 19\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2 & 9\\ 3 & 19\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 9\end{vmatrix}$$
$$=(95-81)-2\cdot(2\cdot 19-3\cdot 9)+3\cdot(2\cdot 9-3\cdot 5)=14-2\cdot 11+9=1$$

Ответ: 1.

б) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$

Решение:

Из второй строки определителя вычтем первую строку, умноженную на 2; из третьей строки вычтем утроенную первую строку, из четвертой - вычтем первую строку, умноженную на 4. Получим нули в первом столбце. Тогда и разложим определитель по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -7\\ 0 & -2 & -8 & -10\\ 0 & -7 & -10 & -13\end{vmatrix}=1\cdot(-1)(-1)(-1)\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ 2 & 8 & 10\\ 7 & 10 & 13\end{vmatrix}$$
$$=-2\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\ 1 & 4 & 5\\ 7 & 10 & 13\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1 & 1 & 7\\ 1 & 2 & 5\\ 7 & 5 & 13\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}1 & 1 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & -36\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 18\end{vmatrix}$$
$$=8\cdot(18+20)=304.$$

Ответ: 304.

6. Нахождение обратной матрицы

Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение: Так как $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$, то найдем

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 11 - 17 + 20 = 36.$$

Для данной матрицы $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 11;$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 21;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Тогда $A^{-1} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$

3.1.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные понятия теории матриц и определителей;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые в теории матриц и определителей;
- выработали навыки по проведению арифметических операций над матрицами, по вычислению определителей;
- освоили основные понятия и свойства теории определителей;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые в теории определителей;
- выработали навыки по вычислению миноров и алгебраических дополнений элементов матрицы, нахождению матрицы, обратной к данной.

3.2 Практическое занятие №3-4 (4 часа)

Тема: СЛУ и методы их решения.

3.2.1 Задание для работы:

1.Определенные и неопределенные СЛУ
2.Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.
3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.
4. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

3.2.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Определенные и неопределенные СЛУ

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$$

или в матричной форме, AX = b, где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$- матрица системы,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных,

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$- матрица-столбец свободных членов данной системы.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 33. \end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 4 & 8 & 1 & 18 \\ 3 & 5 & 4 & 33 \end{array}\right) \begin{matrix} (2) - 4(1) \\ \sim \\ (3) - 3(1) \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & -16 & -11 & -66 \\ 0 & -13 & -5 & -30 \end{array}\right) \begin{matrix} -(2) \\ \sim \\ -16(3) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & 16 & 11 & 66 \\ 0 & 208 & 80 & 480 \end{array}\right) \begin{matrix} (3) - 13(2) \\ \sim \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 3 & 21 \\ 0 & 16 & 11 & 66 \\ 0 & 0 & -63 & -378 \end{array}\right).$$

Система совместна и определенна. Найдем ее решение.

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ \quad 16x_2 + 11x_3 = 66, \\ \qquad\quad 4x_3 = 378. \end{cases} \qquad 16x_2 + 6 \cdot 11 = 66, x_2 = 0;\ x_1 + 18 = 21,$$

$$x_1 = 3, x_3 = \frac{378}{63} = 6.$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 6.$

Пример. Исследовать систему $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$.

Решение:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} (1) \leftrightarrow (4) \\ \sim \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} (2) - 3(1) \\ \sim \\ (3) + 3(1) \\ (4) - 2(1) \end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-4&-4&-8\\0&5&4&10\\0&-3&-4&-7\end{array}\right)\begin{array}{c}-\frac{1}{4}(2)\\ \sim\\ -1\cdot(4)\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&5&4&10\\0&3&4&7\end{array}\right)\begin{array}{c}(3)-5(2)\\ \sim\\ (4)-3(2)\end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{array}\right)\begin{array}{c}(4)+(3)\\ \sim\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&1&1&2\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{array}\right), r(A)=3,$$

$$r(A|b)=4, r(A)\neq r(A|b).$$

Ответ: система несовместна

2.Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Решить систему уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=5,\\2x_1+x_2+x_3=6,\\x_1+x_2+2x_3=4.\end{cases}$$

Решение:

Определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-1&1\\2&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&0\\3&1&2\\2&1&3\end{vmatrix}=(-1)^{1+2}\cdot(-1)\begin{vmatrix}3&2\\2&3\end{vmatrix}=5,$$

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}5&-1&1\\6&1&1\\4&1&2\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}11&2\\9&3\end{vmatrix}=15,$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix}1&5&1\\2&6&1\\1&4&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}6&1\\4&2\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2&6\\1&4\end{vmatrix}=8-15+2\qquad=-5;$$

$$\Delta x_3=\begin{vmatrix}1&-1&5\\2&1&6\\1&1&4\end{vmatrix}=5.$$

Тогда $x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=\frac{15}{5}=3;\ x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}=\frac{-5}{5}=-1;\ x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}=\frac{+5}{5}=1.$

Ответ: $x_1=3;\ x_2=-1;\ x_3=1$

3. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.

Найти решение системы уравнений методом Гаусса.

Данную систему мы приведем к виду:

$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&0\\0&4&9&3\\0&0&-11&11\end{array}\right)$.С помощью элементарныхпреобразований приведем

матрицу А к единичному виду.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & | & 0\\ 0 & 4 & 9 & | & 3\\ 0 & 0 & -11 & | & 11\end{pmatrix} \underset{\sim}{-\frac{1}{11}(3)} \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & | & 0\\ 0 & 4 & 9 & | & 3\\ 0 & 0 & 1 & | & -1\end{pmatrix} \begin{matrix}(2)-9(3)\\ \sim\\ (1)+(3)\end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & | & -1\\ 0 & 4 & 0 & | & 12\\ 0 & 0 & 1 & | & -1\end{pmatrix} \underset{\sim}{\tfrac{1}{4}(2)} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & | & -1\\ 0 & 1 & 0 & | & 3\\ 0 & 0 & 1 & | & -1\end{pmatrix} \underset{\sim}{(1)+(2)} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & | & 2\\ 0 & 1 & 0 & | & 3\\ 0 & 0 & 1 & | & -1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1$.
Проверка. Подставим эти значения неизвестных в систему
2 - 3 - (-1) = 0, 5 • 2 - 1 • 3 + 4 • (-1) = 10 – 7 = 30,
1 • 2 + 2 • 3 + 3(-1) = 8-3 = 5.
Ответ: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -1$.

4. Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы

Решить систему линейных алгебраических уравнений матричным способом.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5,\\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6,\\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение:

$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$- матрица системы уравнений,

$X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ - матрица-столбец неизвестных,

$b = \begin{pmatrix}5\\ 6\\ 4\end{pmatrix}$ - матрица-столбец свободных членов данной системы.

Так как в первом примере вычислен определитель системы и он равенdet A = 5 ≠ 0, то матрица A имеет обратную матрицу A^{-1}.

Вычислим $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*, A^* = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = +3;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2; \; A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = 3.$$

Получили присоединенную матрицу
$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.Тогда $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ирешение системы

найдем по формуле $X = A^{-1} \cdot b$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5+18-8 \\ -15+6+4 \\ 5-12+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда:$x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 1$.

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = 1$.

3.3.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные понятия и свойства теории СЛУ;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении СЛУ;
- выработали навыки по решению определенных СЛУ методами Крамера, Гаусса, и методом обратной матрицы..

3.3 Практическое занятие № 5-6 (ПЗ-5-6) (4 ч.)
Тема: Прямая на плоскости, метрическая теория прямых.

3.3.1 Задание для работы:

1. Векторы, их классификация, арифметические действия над векторами. Скалярное произведение векторов, его свойства. Признаки ортогональности и коллинеарности.
2.Способы задания прямой на плоскости: через две точки, через точку и направляющий вектор, через точку и нормаль, уравнением в отрезках, уравнением с угловым коэффициентом, параметрически, общим уравнением.
3. Взаимное расположение прямых на плоскости
4. Расстояние между точками, расстояние от точки до прямой.

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Векторы, их классификация, арифметические действия над векторами. Скалярное произведение векторов, его свойства. Признаки ортогональности и коллинеарности.

Арифметические действия над векторами

Пример. Заданы векторы$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Найти:

а) координаты вектора$\overrightarrow{a_0}$;   б) координаты вектора $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;

Решение:

а) Так как$\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, то найдем сначала длину вектора$\vec{a}$по формуле $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:

$|\vec{a}| = \sqrt{4+0+9} = \sqrt{13}$. Тогда $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2; 3; 0) = (\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}; 0)$.

б) Вычислим координаты вектора
$\vec{d} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = (2; 3; 0) - \frac{1}{2}(0; -3; -2) + (1; 1; -1) = (3; \frac{11}{2}; 0)$.

Ответ: а) $\overrightarrow{a_0} = (\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}; 0)$; б)$\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$=(3; $\frac{11}{2}$; 0);

Скалярное произведение векторов, его свойства, приложения

Пример. Дано: $|\overrightarrow{a_1}| = 3$, $|\overrightarrow{a_2}| = 4$, $(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}) = \frac{2\pi}{3}$.

Вычислить: а) $\overrightarrow{a_1}^2 = \overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_1}$; б) $(3\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2}) \cdot (\overrightarrow{a_1} + 2\overrightarrow{a_2})$;в) $(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})^2$.

Решение:

а)$\overrightarrow{a_1}^2 = |\overrightarrow{a_1}|^2 = 9$;

б)$(3\overrightarrow{a_1} - 2\overrightarrow{a_2}) \cdot (\overrightarrow{a_1} + 2\overrightarrow{a_2}) = 3\,\overrightarrow{a_1}^2 - 2(\overrightarrow{a_2} \cdot \overrightarrow{a_1}) + 6(\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}) - 4\overrightarrow{a_2}^2 = 3 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 4 \cdot 4^2 = 27 - 24 - 64 = -61$

в)$(\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2})^2 = \overrightarrow{a_1}^2 + 2(\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2}) + \overrightarrow{a_2}^2 = |\overrightarrow{a_1}|^2 + 2|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{a_2}| \cos\frac{2\pi}{3} + 4\,\overrightarrow{a_2}^2 = 9 - 3 \cdot 4 + 16 = 13$.

Ответ: а) 9; б) –61; в) 13.

Признаки коллинеарности и ортогональности векторов

Пример. Определить, при каких значениях α, β коллинеарны векторы $\vec{a} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \beta\vec{k}$и $\vec{b} = \alpha\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + 2\vec{k}$.

Решение: Из условия коллинеарности двух векторов следуют равенства:
$\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2}$. Тогда $\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6}$; $\alpha = 4, \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2}$; $\beta = -1$.

Ответ: $\alpha = 4, \beta = -1$.

Пример. Дано: $|\overrightarrow{a_1}| = 3$, $|\overrightarrow{a_2}| = 5$. Определить, при каком значении α векторы $\overrightarrow{a_1} + \alpha\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_1} - \alpha\overrightarrow{a_2}$ будут перпендикулярны.

Решение:

$\vec{a}\vec{b} \Leftrightarrow \left((\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0\right)$(условие отрогональности векторов).

Следовательно

$(\overrightarrow{a_1} + \alpha\overrightarrow{a_2}) \cdot (\overrightarrow{a_1} - \alpha\overrightarrow{a_2}) = 0, \overrightarrow{a_1}^2 - \alpha^2\overrightarrow{a_2}^2 = 0$,

$|\overrightarrow{a_1}|^2 - \alpha^2|\overrightarrow{a_2}|^2 = 0$; $\alpha^2 = \frac{|\overrightarrow{a_1}|^2}{|\overrightarrow{a_2}|^2} = \frac{9}{25}, \alpha = \pm\frac{3}{5}$.

Ответ: $\pm\frac{3}{5}$.

2.Способы задания прямой на плоскости: через две точки, через точку и направляющий вектор, через точку и нормаль, уравнением в отрезках, уравнением с угловым коэффициентом, параметрически, общим уравнением.

Пример. Дан треугольник с вершинами A(–2; 0), B(2; 4), C(4; 0). Написать уравнения медианы AE, высоты AD и найти длину медианы AE.

Решение:

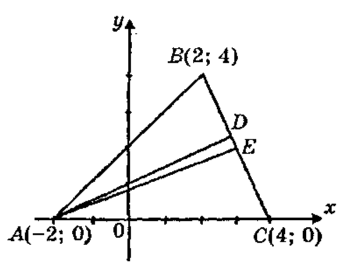
1) Найдем уравнение высоты AD как прямой, проходящей через точку A(–2; 0) перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BC} = (2; -4)$, тогда имеем: $2 \cdot (x + 2) + (-4) \cdot (y - 0) = 0$,

следовательно: $2x - 4y + 4 = 0$.

Окончательно уравнение AD имеет вид:

$x - 2y + 2 == 0$.

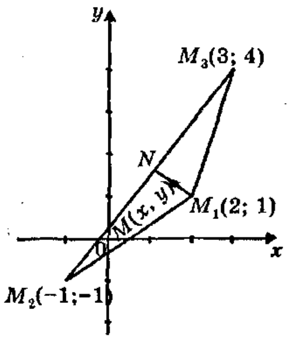


2) Найдем уравнение медианы AE как прямой, проходящей через две точки A и E. Координаты точки E найдем как координаты середины отрезка CB:

E(3; 2). Уравнение AE:

3) Найдем длину медианы AE:

Ответ:



Пример. Даны вершины треугольника , и . Составить уравнения его высот.

Решение:

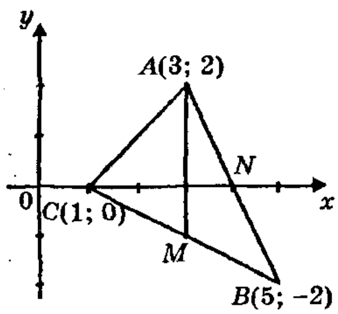
Пусть - высота треугольника . Рассмотрим два вектора и . По условию эти векторы ортогональны. Значит,

Аналогично находим остальные высоты треугольника.

Ответ:

Пример. Составить уравнения сторон и медиан треугольника с вершинами A(3; 2),B(5; -2), C(1; 0).

Решение:



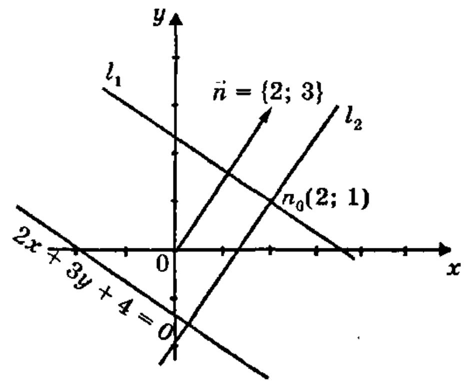
1) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две данные точки

Найдем уравнение медианы AM. Для этого найдем координаты точки M - середины отрезка BC:

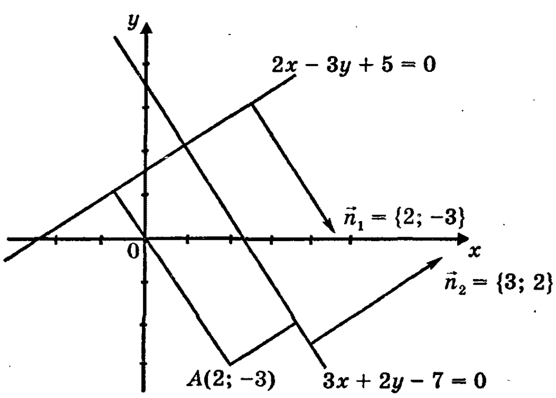
Уравнение AM:

– уравнение медианы, проведенной из вершины A

2) Найдем уравнения CB и CN; N(x; y), где



Тогда BC:



Ответ:

;

BC: $x + 2y – 1 = 0$;

CN: $y = 0$;

CA: $x – y – 1 = 0$;

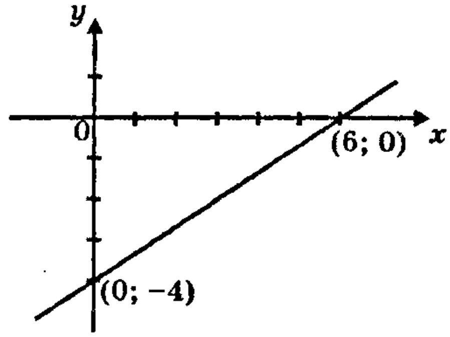
BF: $x + y – 3 = 0$.

Параметрическое уравнение прямой, уравнение в отрезках

$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt; \end{cases}$ $t \in R$ – параметрические уравнения прямой;

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ – уравнение прямой в отрезках, где a и b – величины направленных отрезков, отсекаемых на координатных осях Ох и Оу соответственно

Пример. Определить точки пересечения прямой 2х - 3у - 12 = 0 с координатными осями и построить эту прямую на чертеже.



Решение: Пусть х = 0, у = –4, (0; –4);
у = 0, х = 6, (6; 0)
Уравнение прямой в отрезках имеет вид:

$$\frac{\text{x}}{6} + \frac{⍰}{-4} = 1$$

Ответ:(6; 0) и (0; –4).

Пример. Преобразовать уравнение $3\text{x} - 4⍰ + 12 = 0$ к уравнению в отрезках.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пример. Дана прямая *5x* + *3y*– 3 = 0.
Определить угловой коэффициент «k»
прямой:
а) параллельной данной прямой;
б) перпендикулярной данной прямой.

Решение:$3y = -5x + 3$;
$y = -\frac{5}{3}x + 1$; $k_1 = -\frac{5}{3}$.

а) Угловой коэффициент любой прямой, параллельной данной, равен$k_2 = -\frac{5}{3}$; $(k_1 = k_2)$;

б) Угловой коэффициент любой прямой, перпендикулярной данной, $-k_2 = \frac{3}{5}$, $\left(k_2 = -\frac{1}{k_1}\right)$.

Ответ: а) $k_2 = -\frac{5}{3}$; б) $k_2 = \frac{3}{5}$

3. Взаимное расположение прямых на плоскости

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку М пересечения прямых 5х – у + 10 = 0 и 8х + 4у + 9 = 0 и параллельной прямой
х + 3у = 0.

Решение:
1-й способ.
1) Найдем координаты точки М пересечения прямых5х – у + 10 = 0 и
8х + 4у + 9 = 0:

$$+\begin{cases} 5x - y + 1 = 0 \\ 8x + 4y + 9 = 0 \end{cases}\Bigg| \cdot 4$$

$$28x = -49; x = -\frac{49}{28} = -\frac{7}{4}; x = -\frac{7}{4}, y = \frac{5}{4}; M\left(-\frac{7}{4}; \frac{5}{4}\right).$$

2) Прямаях + 3у = 0 имеет нормальный вектор $\vec{n}$ = (1; 3). Так как уравнение искомой прямой имеет тот же нормальный вектор, то

$\left(x + \frac{7}{4}\right) \cdot 1 + \left(y - \frac{5}{4}\right) \cdot 3 = 0,$

$4x + 7 + 12y - 15 = 0,\ 4x + 12y - 8 = 0,\ x + 3y - 2 = 0.$

Пример. Дана прямая 2х + 3у + 4 = 0. Составить уравнение прямой, проходящей через точку$M_0(2; 1)$:

а) параллельно данной прямой; б) перпендикулярно данной прямой.

Решение:

1-й способ.

Нормальный вектор данной прямой - $\vec{n}$= (2; 3).

а) Поэтому уравнение прямой, проходящей через точку $\mathrm{M_0}(2; 1)$, перпендикулярно вектору $\vec{\mathrm{n}}$ = (2; 3) будет:

(х - 2) • 2 + (у - 1) • 3 = 0, 2х + 3у - 7 = 0.

б) Уравнение прямой, проходящей через данную точку$\mathrm{M_0}(2; 1)$; параллельно вектору $\vec{\mathrm{n}}$ (перпендикулярно данной прямой), будет:

$$\frac{\mathrm{x} - 2}{2} = \frac{y - 1}{3}; 3\mathrm{x} - 6 = 2y - 2; 3\mathrm{x} - 2y - 4 = 0.$$

2-й способ.

Представим уравнение данной прямой, как уравнение с угловым коэффициентом, $y = -\frac{2}{3}\mathrm{x} - \frac{4}{3};\ \mathrm{k_1} = -\frac{2}{3}$.

а) Тогда уравнение прямой, проходящей через данную точку $\mathrm{M_0}(2; 1)$ параллельно данной прямой, будет:$y - y_0 = \mathrm{k} \cdot (\mathrm{x} - \mathrm{x_0})$ или

$y - 1 = -\frac{2}{3}(\mathrm{x} - 2); 3y - 3 = -2\mathrm{x} + 4; 2\mathrm{x} + 3y - 7 = 0.$

б) Так как угловой коэффициент прямой, перпендикулярной данной, равен $\mathrm{k_2} = -\frac{1}{\mathrm{k_1}}$, то уравнение искомой прямой будет: $y - y_0 = -\frac{1}{\mathrm{k_1}}(\mathrm{x} - \mathrm{x_0})$ или $y - 1 = \frac{3}{2}(\mathrm{x} - 2), 2y - 2 = 3\mathrm{x} - 6, 3\mathrm{x} - 2y - 4 = 0.$

Ответ: а) $2\mathrm{x} + 3y - 7 = 0$; б) $3\mathrm{x} - 2y - 4 = 0$.

4. Расстояние между точками, расстояние от точки до прямой.

Пример. Написать уравнение прямой, проходящей через точку А(2; 4) и удаленной от начала координат на расстояние d = 2.

Решение:

Уравнение прямой, проходящей через точку А(2; 4), запишем в виде:

$\mathrm{A}(\mathrm{x} - 2) + \mathrm{B}(y - 4) = 0$. Если В = 0, то имеем х = 2; если В ≠ 0,

то$y - 4 - \mathrm{k}(\mathrm{x} - 2) = 0$, где $\mathrm{k} = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}, -\mathrm{kx} + y + 2\mathrm{k} - 4 = 0$. По условиюd $= \frac{|\mathrm{Ax_0} + \mathrm{By_0} + \mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}; 2 = \frac{|2\mathrm{k} - 4|}{\sqrt{\mathrm{k}^2 + 1}};\ \sqrt{\mathrm{k}^2 + 1} = |\mathrm{k} - 2|;$

$$(\mathrm{x_0} = 0, y_0 = 0);\ \mathrm{k}^2 + 1 = \mathrm{k}^2 - 4\mathrm{k} + 4;\ -4\mathrm{k} + 3 = 0,$$

$\mathrm{k} = \frac{3}{4}; y - 4 - \frac{3}{4}(\mathrm{x} - 2); 3\mathrm{x} - 4y + 10 = 0.$

Ответ: $3\mathrm{x} - 4y + 10 = 0, \mathrm{x} = 2.$

Пример. Определить угол φ между двумя прямыми:

5х - у + 7 = 0, 3х + 2у = 0.

Решение: За угол между прямыми возьмем угол между их нормальными векторами: $\vec{n}_1 = (5; -1)$, $\vec{n}_2 = (3; 2)$.

Тогда $\cos\varphi = \frac{(\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2})}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{15-2}{\sqrt{26}\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{2}\sqrt{13}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$;отсюда φ = 45°.

Ответ: φ = 45°.

3.3.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач векторной алгебры;
- выработали навыки операций с векторами в координатной форме.
- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение скалярного произведения, для установления коллинеарности и ортогональности векторов;
- освоили основные методы задания прямой на плоскости
- усвоили основные алгоритмы, применяемые в решении задач на нахождение уравнений прямой на плоскости, выработали навыки нахождения уравнений прямых и их компонентов;
- освоили основные формулы метрической теории прямых.

3.4 Практическое занятие 7 (ПЗ-7) (2 ч.).

Тема: Функции одной действительной переменной, их классификация, основные понятия.

3.4.1 Задание для работы:

1. Классификация функций, их графики.
2. Решение уравнений и неравенств, содержащих знак абсолютной величины.

3.4.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Классификация функций, их графики.

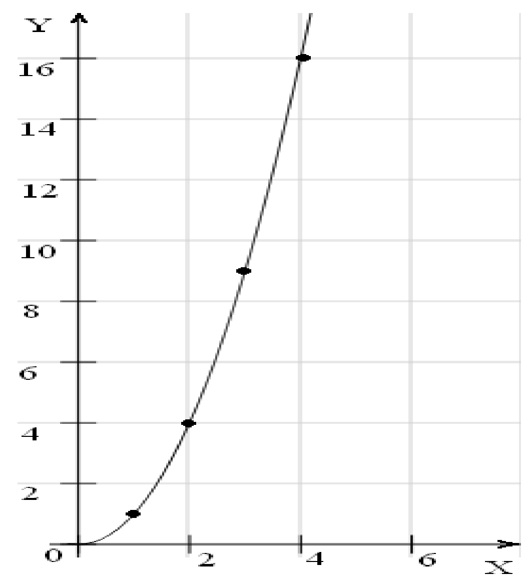
*1. **Табличный способ*** наиболее широко распространен (таблицы логарифмов, квадратных корней), основное его достоинство – возможность получения числового значения функции, недостатки заключаются в том, что таблица может быть трудно читаема и иногда не содержит промежуточных значений аргумента.

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

Например:

Аргумент *x* принимает заданные в таблице значения, а *y* определяется соответственно этому аргументу *x*.

*2. **Графический способ*** заключается в проведении линии (графика), у которой абсциссы изображают значения аргумента, а ординаты – соответствующие значения функции. Часто для наглядности масштабы на осях принимают разными.



Например: для нахождения по графику *y*, которому соответствует *x* = *2,5* необходимо провести перпендикуляр к оси *x* на отметке *2,5*. Отметку можно довольно точно сделать с помощью линейки. Тогда найдем, что при *x = 2,5 y*равно *7,5*, однако если нам необходимо найти значение *y* при *x* равном *2,76*, то графический

способ задания функции не будет достаточно точным, т.к. линейка не дает возможности для столь точного замера.
Достоинства этого способа задания функций заключаются в легкости и целостности восприятия, в непрерывности изменения аргумента; недостатком является уменьшение степени точности и сложность получения точных значений.
3. ***Аналитический способ*** состоит в задании функции одной или несколькими формулами. Основным достоинством этого способа является высокая точность определения функции от интересующего аргумента, а недостатком является затрата времени на проведение дополнительных математических операций.
Например:
Функцию можно задать с помощью математической формулы $y=x^2$, тогда если x равно 2, то y равно 4, возводим x в квадрат.
4. ***Словесный способ*** состоит в задании функции обычным языком, т.е. словами. При этом необходимо дать входные, выходные значения и соответствие между ними.
Например:
Словесно можно задать функцию (задачу), принимающуюся в виде натурального аргумента x с соответствующим значением суммы цифр, из которых состоит значение y. Поясняем: если x равно 4, то y равно 4, а если x равно 358, то y равен сумме $3 + 5 + 8$, т. е 16. Далее аналогично.
5. ***Рекурсивный способ*** состоит в задании функции через саму себя, при этом **значения функции** определяются через другие ее же значения. Такой способ задания функции используется в задании множеств и рядов.
Например:
При разложении *числа Эйлера* задается функцией:

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \ldots}}} = 2 + f(2)$$

Ее сокращение приведено ниже:

$$f(n) = \frac{n}{n + f(n+1)}$$

При прямом расчёте возникает бесконечная рекурсия, но можно доказать, что значение $f(n)$ при возрастании n стремится к единице (поэтому, несмотря на бесконечность ряда, значение *числа Эйлера* конечно). Для приближённого вычисления значения e достаточно искусственно ограничить глубину рекурсии некоторым наперёд заданным числом и по достижении его использовать вместо $f(n)$ единицу.

Классификация функций.

Пусть даны две функции: y = f(z), определенная на множестве z, и z=g(x), определенная на множестве x. Если $g(x) \subset z$; то на множестве X можно определить функцию, которая каждому $x \in X$ поставит в соответствие $g(x) = z \in Z$. Тогда на множестве X определена функция $y = f[g(x)] = f_1(x)$. Эта функция называется **сложной** функцией x или **суперпозицией**(наложением) функций f и g.
Областью определения сложной функции $y = f[g(x)]$ является либо вся область определения функции z=g(x), либо та ее часть, в которой определены значения z, не выходящие из области определения f(z). Например, пусть $y = \sin x, \quad z = x^3$. Функция $y = \sin z$ определена на всей числовой оси, функция $z = x^3$ также определена на всей числовой оси. Суперпозиция этих функций $y = \sin x^3$ является сложной функцией x , определенной на всей числовой оси.

При рассмотрении сложных функций следует иметь в виду области определения составляющих функций. Например, из функций $y = \arccos z$ и $z = 5 + x^2$ нельзя образовывать сложную функцию, так как функция y=arccosz определена для $z \subset [-1, 1]$, а функция $z = 5 + x^2 > 1$, т.е. не принадлежит этому отрезку.
Можно рассматривать суперпозиции не только двух, но и трех, четырех, т.е. любого конечного числа функций.
Функция y=f(x) называется **обратимой**, если она принимает каждое свое значение один раз. Пусть f– отображение множества X на множество Y. Если для любого элемента y из Y существует единственный элемент x=g(y), для которого f(x)=y, то отображение f называется обратимым. Отображение, обратное к у, обозначается $f^{\ 1}$ и называется обратной функцией, а функция y=f(x) называется прямой функцией. Например, функция $y = \ln x$ имеет обратную функцию $x = e^y$, а для функции y = x^3обратной будет $x = \sqrt[3]{y}$. Не всякая функция имеет обратную. По графику прямой функции y=f(x) достаточно просто определить, имеет ли эта функция обратную. Если какая-либо прямая, параллельная оси OX, пересекает график прямой функции не более чем в одной точке, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ существует. Если же хотя бы одна из таких прямых пересекает график функции в двух или более точках, то обратная функция не существует. Если построить прямую и обратную функции в одной системе координат, то их графики будут симметричны относительно прямой $y = x$ - биссектрисы I и III координатных углов.

Функция f(x) называется **возрастающей** на множестве X, если для произвольных x_1, x_2, из X при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т.е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Например, $y = x^5$, $y = 3x + 2$ - возрастают. Функция f(x) называется **убывающей,** если, наоборот, большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции: при . Например: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Возрастающие и убывающие функции называют **строго монотонными.**
Числовое множество X называется симметричным, если для произвольного элемент $-x \in X$. Например, множество целых чисел, действительных чисел, отрезок [-a, a]. Функция f, определенная на симметричном множестве X, называется **четной**, если $\forall x \in X, f(-x) = f(x)$. Например: $y = x^2, y = \cos x, y = |x|$. График четной функции симметричен относительно оси OY.
Функция f, определенная на симметричном множестве X, называется **нечетной**, если $\forall x \in X, \ f(-x) = -f(x)$. Например: $y = \operatorname{tg} x, \quad y = x^3, \quad y = \sin x.$ График нечет-ной функции симметричен относительно точки O(0,0) – начала координат. Функция может быть нечетной, ни нечетной, например: $y = 2x + 3, \quad y = \log_3 x$.
Пусть f определена на множестве X. Если существует $\omega \neq 0$ такое, что $\forall x \in X$ числа $x + \omega$ и $x - \omega$ также принадлежат множеству X и $f(x + \omega) - f(x), \ (f(x - \omega) = f(x))$, то функцию f называют **периодической** с периодом ω.
Примеры:
1) $y = \sin x$ периодическая с периодом $\omega = 2\pi k$, где $k \in z$;
2) $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом $\omega = \pi k$, где ;
3) дробная часть числа: $y = \{x\} = x - [x]$ - периодическая, $\omega = 1$.
Установление факта периодичности функции существенно облегчает ее изучение и построение графика: периодическую функцию можно исследовать в пределах одного периода. Для построения графика периодической функции с периодом достаточно

построить график этой функции на интервале $(x, x+\omega)$, а затем полученный график периодически продолжить. Рассмотрим некоторые примеры на установление периодичности функции.

Пример. $f(x) = \sin 6x$

Существует ли такое **,**чтобы для всех действительных x выполнялось условие $\sin 6(x+\omega) = \sin 6x$?

Имеем $\sin 6(x+\omega) - \sin 6x = 0$, $2\cos(6x+3\omega)\cdot\sin 3\omega = 0$, это выполняется при $\sin 3\omega = 0, \quad 3\omega = \pi k, \quad \omega = \frac{\pi k}{3}, \quad k \in z$. Следовательно, такие существуют, функция является периодической, наименьший ее положительный период $\pi/3$.

Пример 2. $y - \left(\cos x + \sin x\right)^2$.

Имеем $y = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x$ или $y = 1 + \sin 2x$ - периодическая функция с периодом .

Функция f, определенная на множестве X, называется **ограниченной** на множестве $X_1 \subset X$, если множество ее значений f(x) на множестве X_1 ограничено, т.е. существуют постоянные m и M такие, что $m \le f(x) \le M$. В противном случае функция называется **неограниченной.**

Примеры:

1) $y = 2\cos 3x$ ограничена на всей числовой оси, т.к. $-2 \le 2\cos 3x \le 2$;

2) функция ограничена снизу, так как $\forall x \quad e^x > 0$;

3) функция $y = \mathrm{ctg}\, x$ ограничена на промежутке $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, но ограничена на промежутке $(0, \pi)$.

2. Решение уравнений и неравенств, содержащих знак абсолютной величины.

Пример. Решим уравнение: $|x-5| = 1$.

Решение. На геометрическом языке это уравнение описывает множество точек, удаленных от точки –5 на расстояние 1. Это точки {–4,–6}.

Ответ. –4;–6.

Используя геометрическую интерпретацию, легко решают уравнения вида:

$|x - a| = c$, (1) $|x - a| - |x - b| = c$, (2)

$|x - a| - |x - b| = c$, (3), где $a, b, c \in R$.

Решить уравнение (1) – следовательно, найти все точки на числовой оси *Ox*, которые отстоят от точки с координатой *a* на расстояние *c*. При $c < 0$ уравнение решений не имеет; при $c = 0$ оно имеет один корень $x = a$ и при $c > 0$ уравнение имеет два корня $x_1 = a - c$ и $x_2 = a - c$.

Решить уравнение (2) –следовательно, найти все точки на числовой оси *Ox*, для каждой из которых сумма расстояний от нее до точек с координатами *a* и *b* равна *c*. Аналогично интерпретируется решение уравнения вида (3).

Пример. Решим уравнение $|x-1| - |x-3| = 2$ с использованием геометрической интерпретации модуля.

Решение. Найдем на числовой оси *Ox* все точки, для каждой из которых разность расстояния от нее до точки с координатой 1 и расстояния от нее до точки с координатой 3 равна 2. Так как длина отрезка [1, 3] равна 2, то ясно, что любая точка с координатой $x \geq 3$ удовлетворяет данному уравнению, а любая точка с координатой $x < 3$ не удовлетворяет ему.

Таким образом, решением исходного уравнения является множество всех чисел из промежутка $[3;\ -\infty)$.

Пример. Решим уравнение $|x-1|-|x-2|=1$ с использованием геометрической интерпретации модуля.

Решение. Исходя из геометрической интерпретации модуля, левая часть уравнения представляет собой сумму расстояний от некоторой точки абсцисс x до двух фиксированных точек с абсциссами 1 и 2. Тогда очевидно, что все точки с абсциссами из отрезка $[1;\ 2]$ обладают требуемым свойством, а точки, расположенные вне этого отрезка – не обладают требуемым свойством. Следовательно, множеством решений уравнения является отрезок $[1;\ 2]$.

Ответ. $x \in [1;\ 2]$.

Пример. Решим уравнение $x-1 - x-2 = 1$ с использованием геометрической интерпретации модуля.

Решение. Будем рассуждать аналогично рассмотренному выше примеру, при этом получим, что разность расстояний до точек с абсциссами 1 и 2 равна единице только для точек, расположенных на координатной оси правее числа 2. Следовательно, решением данного уравнения является не отрезок, заключенный между точками 1 и 2, а луч, выходящий из точки 2, и направленный в положительном направлении оси Ox.

Ответ. $x \in [2;\ -\infty)$.

Пример. Решим аналитически уравнение: $|x-2| = 3$.

Решение. Воспользуемся определением модуля. Если выражение, находящееся под модулем неотрицательно, то есть $x-2 \geq 0$, тогда снимем знак модуля со знаком «плюс», уравнение примет вид: $x-2=3$.

Если выражение, находящееся под модулем $x-2 \leq 0$, тогда снимем знак модуля со знаком «минус», уравнение примет вид: $-(x-2)=3$.

Таким образом, либо $x-2=3$, либо $x-2=-3$. Решим полученные уравнения, получим: $x_1=-1;\quad x_2=5$.

Ответ. $x_1=-1;\quad x_2=5$.

Пример. Решим аналитически уравнение: $1 - |x| = 0{,}5$.

Решение. Преобразуем данное уравнение: $|x| = -0{,}5$.

Понятно, что в этом случае уравнение не имеет решений, так как, по определению, модуль всегда неотрицателен.

Ответ. Решений нет.

Пример. Решим уравнение: $|-x - 2| = 2x - 1$.

Решение. Найдем область определения уравнения.

Заметим, что в предыдущих примерах такой необходимости не было.

В данном уравнении в левой части стоит модуль некоторого выражения, в правой части – выражение с переменной. Именно это обстоятельство отличает данный пример от примеров, рассмотренных выше.

Поскольку в левой части уравнения содержится модуль, в правой части – выражение, содержащее переменную, необходимо потребовать, чтобы выражение в правой части уравнения было неотрицательным, то есть $2x-1\geq 0; \quad x\geq -\frac{1}{2}.$ Таким образом, область определения уравнения $x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Воспользуемся алгебраическим определением модуля. Если выражение, находящееся под модулем неотрицательно, то есть $-x-2\geq 0,$ тогда снимаем знак модуля со знаком «плюс». Если выражение, находящееся под модулем $-x-2\leq 0,$ тогда снимаем знак модуля со знаком «минус».

Получим две смешанных системы: $\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2}, \\ -x+2=2x+1; \end{cases}$ и $\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2}, \\ -x+2=-(2x+1). \end{cases}$

Решим каждую систему: $\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2}, \\ x=\frac{1}{3}; \end{cases}$ число $x=\frac{1}{3}$ принадлежит промежутку $x\in\left[-\frac{1}{2};-\infty\right)$ и является корнем исходного уравнения.

$\begin{cases} x\geq -\frac{1}{2}, \\ x=-3; \end{cases}$ число $x=-3$ не принадлежит промежутку $x\in\left[-\frac{1}{2};-\infty\right)$ и не является корнем уравнения.

Ответ. $x=\frac{1}{3}$.

Пример. Рассмотрим метод интервалов на примере решения более сложного уравнения: $|x-1|-|x|-3|x-1|-2|x-2|=x-2$ **.**

Решение. Чтобы выделить интервалы знакопостоянства, найдем точки, в которых выражения, записанные под модулем, обращаются в нуль:

$x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1;$

$x=0;$

$x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=1;$

$x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=2.$

Полученные точки разбивают числовую ось на интервалы: $(-\infty;-1];\ [-1;0];\ [0;1];$ $[1;2];\ [2;+\infty).$ Определим знаки выражений на этих интервалах (Рис. 1)

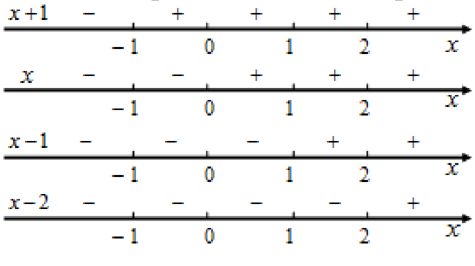


Рис.1

Учитывая знаки, раскроем модули.

В результате получим совокупность систем, равносильную данному уравнению:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 2, \\ x-1-x-3|x-1|-2|x-2| = x-2; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x < 2, \\ x-1-x-3|x-1|-2|x-2| = x-2; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ x-1-x-3|x-1|-2|x-2| = x-2; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x < 0, \\ x-1-x-3|x-1|-2|x-2| = x-2; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ -|x-1|-x-3|x-1|-2|x-2| = x-2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Последняя совокупность приводится к виду:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 2, \\ 0 \cdot x = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} 1 \le x < 2, \\ x = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ x = -1; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x < 0, \\ 0 \cdot x = 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x < -1, \\ x = -2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Теорема. Пусть даны неравенства вида $|x| < a$, $|x| > a$. При любом действительном значении *a* неравенство $|x| < a$ равносильно системе неравенств $\begin{cases} x < a, \\ x > -a; \end{cases}$ неравенство $|x| > a$ равносильно совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x < -a. \end{array}\right.$

Пример. Решим неравенство: $\left|x^2 - 3x\right| + x - 2 < 0$.

Решение. Рассмотрим решение, основанное на доказанной теореме, согласно которой последнее неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2 - 3x < 2 - x, \\ x^2 - 3x > -(2 - x); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 < 0; \\ x^2 - 4x - 2 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x < 2 - \sqrt{2}, \\ x > 2 + \sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Решение системы представлено на рисунке 26

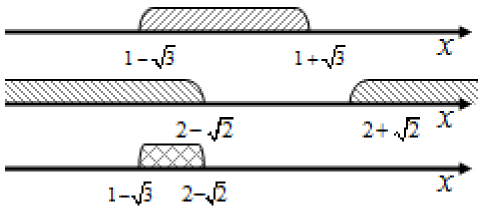


Рис. 26

Ответ. $x \in [1-\sqrt{3};\ \ 2-\sqrt{2}]$.

Пример. Решим неравенство $\big|2x-1-|3x-1|\big| \ge x-2$.

Решение. Пользуясь доказанной равносильностью, перейдем к совокупности неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} 2x-1-|3x-1| \ge x-2, \\ 2x-1-|3x-1| \le -x-2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |3x-1| \le x-1, \\ |3x-1| \ge 3x-3; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 3x-1 \le x-1, \\ 3x-1 \ge -(x-1); \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 3x-1 \ge 3x-3, \\ 3x-1 \le -(3x-3); \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 0 \end{array}\right. \\ 0 \cdot x \ge 2, \\ x \le -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$$

Система $\left\{\begin{array}{l} x \le -1, \\ x \ge 0 \end{array}\right.$ и неравенство $0 \cdot x \ge 2$ не имеют решений. Следовательно, решением совокупности (и данного неравенства) является числовой луч $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$.

Ответ. $x \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]$.

3.5.3 Результаты и выводы:

- освоили основные понятия и свойства теории функции одного действительного переменного, классификацию функций;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые при классификации функции;
- выработали навыки решению уравнений и неравенств, содержащих один знак абсолютной величины.

Практическое занятие 8-9 (ПЗ-8-9) (2 ч.)

Тема: Предел и непрерывность функции в точке

3.5.1 Задание для работы:

1. Техника нахождения пределов функций в точке.
2. Техника нахождения пределов функций на бесконечности.
3. Исследование функции на непрерывность. Характеристика точек разрыва.

3.5.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Техника нахождения пределов функций в точке.
Найти пределы функций:

1а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}$ =(так как функция непрерывна при x=2)= $\dfrac{8-10-3}{12-8-15}=\dfrac{5}{11}$.

1б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$2x^2-5x-3=0;\quad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm 7}{4};$$

$$x_1=3,\ x_2=-\frac{1}{2}.\Rightarrow 2x^2-5x-3=2(x-3)(x+\frac{1}{2})=(x-3)(2x+1).$$

$$3x^2-4x-15=0;\quad x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+180}}{6}=\frac{4\pm 14}{6};$$

$$x_1=3,\ x_2=-\frac{5}{3}.\Rightarrow 3x^2-4x-15=3(x-3)(x+\frac{5}{3})=(x-3)(3x+5).$$

Получим $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(2x+1)}{\cancel{(x-3)}(3x+5)}=\dfrac{1}{2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x}}{x-4}\left(\dfrac{0}{0}\right)=$ (Домножим числитель и знаменатель на сумму корней)

$$\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{7-x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-1-(7-x)}{(x-4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=\lim_{x\to 4}\frac{2\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x})}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{7-x}}=\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x\cdot\sin x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\cdot\sin x}=\dfrac{2}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x}=$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Применили следствия из первого замечательного предела.

2. Техника нахождения пределов функций на бесконечности.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-4x-15}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}(2-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2})}{\cancel{x^2}(3-\frac{4}{x}-\frac{15}{x^2})}=\dfrac{2}{3}$.

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-2}(1^{\infty})$. Применим второй замечательный предел. Сделаем замену

$$\left| \begin{array}{l} \frac{x+3}{x-1} = 1+z;\ z = \frac{4}{x-1} \Rightarrow x \to \infty, z \to 0. \\ x - 1 = \frac{4}{z}.\ x = \frac{4}{z} + 1 \end{array} \right|$$. Получим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x-2} = \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{4}{z}-1} = e^4.$

Бесконечно малые эквивалентные данным. Замечательные пределы

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot tg^2 3x}{\sin 4x\cdot(1-\cos x)}$$

На повестке дня неопределённость «ноль на ноль» и ситуация погранична: решение можно провести стандартно, но преобразований будет много. С моей точки зрения, здесь вполне уместно использовать замечательные эквивалентности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot tg^2 3x}{\sin 4x\cdot(1-\cos x)} = \frac{0}{0} = (*)$$

Заменим бесконечно малые функции эквивалентными функциями. При $\alpha\to 0$:

$tg\alpha \sim \alpha$

$\sin\alpha \sim \alpha$

$1-\cos\alpha \sim \frac{1}{2}\cdot\alpha^2$

$$(*) = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(3x)^2}{4x\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{2x^2} = \frac{9}{2}$$

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^3(1+x)}{\arcsin^2\left(\frac{x}{3}\right)\cdot\sin\frac{x^2}{3}}$$

А вот это уже тяжёлый случай, когда провести решение стандартным образом весьма непросто. Используем замечательные эквивалентности:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^3(1+x)}{\arcsin^2\left(\frac{x}{3}\right)\cdot\sin\frac{x^2}{3}} = \frac{0}{0} = (*)$$

Заменим бесконечно малые эквивалентными. При $\alpha\to 0$:

$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$

$\arcsin\alpha\sim\alpha$

$\sin\alpha\sim\alpha$

$$(*) = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\left(\frac{x}{3}\right)^2\cdot\frac{x^2}{3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\frac{x^2}{9}\cdot\frac{x^2}{3}} = 27\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^4} = 27\lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

Получена бесконечность, значит, знаменатель более высокого порядка малости, чем числитель.

3. Найти предел функции, используя эквивалентные бесконечно малые величины и другие преобразования

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-6x}-1)\sin 4x}{\ln^2(1-2x)}$$

Решаем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-6x}-1)\sin 4x}{\ln^2(1-2x)} = \frac{0}{0} = (*)$$

На первом шаге используем замечательные эквивалентности. При $\alpha\to 0$:

$\sin\alpha\sim\alpha$

$\ln(1+\alpha)\sim\alpha$

С синусом всё понятно: $\sin 4x \sim 4x$. Представим логарифм в виде $\ln(1-2x) = \ln(1+(-2x))$ и применим эквивалентность $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$. В данном случае $\alpha = -2x$ и $\ln(1+(-2x)) \sim -2x$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-6x}-1)\cdot 4x}{(-2x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-6x}-1)\cdot 4x}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-6x}-1}{x}=\frac{0}{0}=(*)$$

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение:

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1-6x}-1)(\sqrt{1-6x}+1)}{x(\sqrt{1-6x}^{\to 1}+1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-6x-1}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-6x}{x}=\frac{1}{2}\cdot(-6)=-3$$

4. Найти предел функции с помощью эквивалентных бесконечно малых функций

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin^2 3x}}{\ln(\cos 3x)}$$

Перед решением необходимо выполнить предварительные преобразования.

В числителе вынесем за скобки «минус»: $1-e^{\sin^2 3x}=-(e^{\sin^2 3x}-1)$ чтобы в дальнейшем воспользоваться эквивалентностью $e^{\alpha}-1\sim\alpha$.

В знаменателе проведём искусственное преобразование $\ln(\cos 3x)=\ln(1+(\cos 3x-1))$, чтобы далее применить эквивалентность $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$. Кстати, запомните это трюк с логарифмом, он используется и в других задачах математического анализа.

Начнём оформлять решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{\sin^2 3x}}{\ln(\cos 3x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-(e^{\sin^2 3x}-1)}{\ln(1+(\cos 3x-1))}=(*)$$

В числителе используем замечательную эквивалентность $e^{\alpha}-1\sim\alpha$. В данном случае $\alpha=\sin^2 3x$.**Важнейшим моментом** является тот факт, что при «икс», стремящемся к нулю, $\alpha=\sin^2 3x\to 0$.

В знаменателе $\cos 3x-1$ тоже бесконечно малая величина, именно поэтому можно применить эквивалентность $\ln(1+\alpha)\sim\alpha$, где $\alpha=(\cos 3x-1)\to 0$ при $x\to 0$.

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 3x}{\cos 3x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 3x}{-(1-\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{1-\cos 3x}=\frac{0}{0}=(*)$$

После замены проведена пара технических действий – вынесение «минуса» в знаменателе и сокращение минусов. Неопределённость 0:0 никуда не делась, и есть надобность воспользоваться бесконечно малыми эквивалентными функциями ещё раз.

Если $\alpha\to 0$, то $\sin\alpha\sim\alpha,\quad 1-\cos\alpha\sim\frac{1}{2}\cdot\alpha^2$: $(*)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}\cdot(3x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{\frac{1}{2}\cdot(3x)^2}=2$

5. Найти предел функции

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x\sin\frac{1}{x}\right)$$

В данном примере «икс» стремится к бесконечности, и $f(x)=\sin\frac{1}{x}\to 0$. Иными словами, функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ *бесконечно мал А* в точке $x=\infty$. Чтобы раскрыть неопределённость $\infty\cdot 0$ целесообразно использовать теорию эквивалентных бесконечно малых величин.

Поскольку $\alpha=\frac{1}{x}\to 0$, то применима замечательная эквивалентность $\sin\alpha\sim\alpha$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(3x\sin\frac{1}{x}\right)=\infty\cdot 0=\lim_{x\to\infty}\left(3x\cdot\frac{1}{x}\right)=3$$

3. Исследование функции на непрерывность. Характеристика точек разрыва.

1. Найти точки разрыва функции, построить график этой функции:

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{при } x\le 1\\ (1-x)^2 & \text{при } 1<x\le 3\\ x \quad \text{при } x>3\end{cases}.$$

Решение

Функция непрерывна в интервалах (-∞, 1), (1, 3), (3,+∞). Проверим функцию на непрерывность в точках x_0=1 и 3. Воспользуемся определением непрерывности функции f(x) в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)\cdot$$

1) x_0=1

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0;$

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^2=0;$

$f(1)=1-1=0.$

Следовательно функция непрерывна в точке x_0=1.

2) x_0=3.

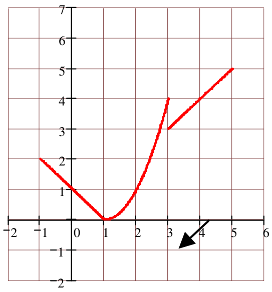
$\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}(1-x)^2=4;$

$\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3} x=3;$

$f(3)=(1-3)^2=4.$

Следовательно функция разрывна в точке x_0=3.

Сделаем чертеж



2. Найти точки разрыва функции, построить график этой функции

$$f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{при } x<0\\ x & \text{при } 0\le x<3\\ x^2-6x & \text{при } x\ge 3\end{cases}.$$

Решение

Функция непрерывна в интервалах (-∞, 0), (0, 3), (3,+∞). Проверим функцию на непрерывность в точках x_0=0 и 3. Воспользуемся определением непрерывности функции f(x) в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0).$$

1) x_0=0

$\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1;$

$\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = 0;$

$f(0) = 0.$

Следовательно функция разрывна в точке x_0=0.

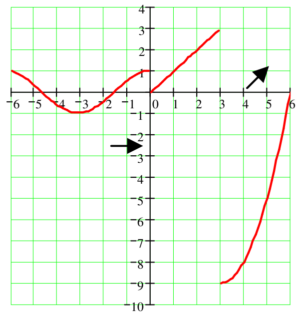
2) x_0=3.

$\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} x = 3;$

$\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x^2 - 6x) = 9 - 18 = -9;$ Следовательно функция разрывна в точке

$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 = -9.$

x_0=3. Сделаем чертеж



3.5.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия и свойства теории пределов функции, классификацию функций;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые при нахождении предела функции в точке и на бесконечности;
- выработали навыки по нахождению предела функции с использованием замечательных пределов и таблицы бесконечно малых, эквивалентных данным;
- освоили основные понятия и свойства теории непрерывности функции одного действительного переменного, классификацию точек разрыва;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые при нахождении и классификации точек разрыва;
- выработали навыки по исследованию функции на непрерывность.

3.6 Практическое занятие 10-11 (ПЗ-10-11) (4 ч.)

Тема: Производная функции в точке, ее геометрический, экономический, физический смысл, правила дифференцирования, приложения.

3.6.1 Задание для работы:

1.Физический, геометрический, экономический смысл производной. Таблица основных производных, правила дифференцирования.
2. Дифференцирование сложной функции.
3. Дифференцирование показательно-степенной функции. Дифференцирование неявной функции.

3.6.2 Краткое описание проводимого занятия:
1.Физический, геометрический, экономический смысл производной. Таблица основных производных, правила дифференцирования.

Составить уравнения касательной и нормали к параболе $y=x^2-3x+5$, проведенной в точке M(2, 3). Найти угол, образованный касательной с осью абсцисс.

Решение

Уравнение касательной к кривой y=f(x) в точке $M(x_0;y_0)$ имеет вид $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Уравнение нормали к кривой y=f(x) в точке $M(x_0;y_0)$ имеет вид $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$.

Известно $x_0=2$, $y_0=3$. Найдем производную $y'=2x-3$. Тогда при x=2 $f'(x_0)=f'(2)=4-3=1$.

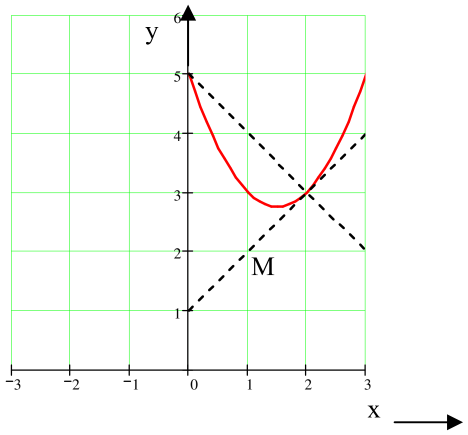
$y-3=1\cdot(x-2)$; $y=x+1$–уравнение касательной.

$y-3=-1\cdot(x-2)$; $y=-x+5$–уравнение нормали.

Производная функции в данной точке численно равна угловому коэффициенту касательной, поэтому $\operatorname{tg}\varphi=1\Rightarrow\varphi=45°$.

Сделаем чертеж. Для этого перепишем уравнение параболы в виде

$y=x^2-2\cdot1{,}5x+1{,}5^2-1{,}5^2+5$, или $y=(x-1{,}5)^2+2{,}75$; $y-2{,}75=(x-1{,}5)^2$. Следовательно, вершина параболы лежит в точке (1,5; 2,75)



Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{8}=1$, проведенной в точке M(-9;-8).

Решение

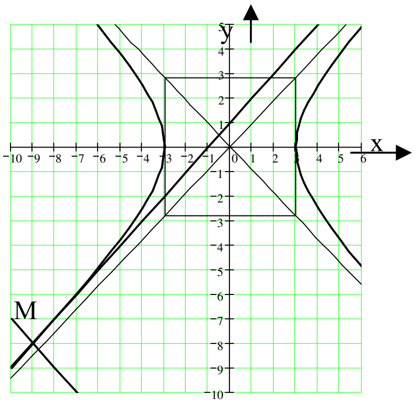
Уравнение касательной к кривой y=f(x) в точке $M(x_0;y_0)$ имеет вид $y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

Уравнение касательной к кривой y=f(x) в точке $M(x_0;y_0)$ имеет вид $y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0)$.

Найдем $f'(x_0)$, используя производную неявной функции. Дифференцируем равенство для функции по x.

$\frac{2x}{9}-\frac{2y\cdot y'}{8}=0,\Rightarrow\frac{y\cdot y'}{8}=\frac{x}{9},\Rightarrow y'=f'(x)=\frac{8x}{9y}$. Подставляя координаты точки М, получим $f'(x_0)=f'(-9)=\frac{8\cdot(-9)}{9\cdot(-8)}=1$. Следовательно

y+8=1·(x+9), или y=x+1–уравнение касательной;
y+8=-1·(x+9), или y=-x-17–уравнение нормали.
Сделаем чертеж, учитывая, что полуоси гиперболы a=3, $b=\sqrt{8}\approx 2{,}8$.



Ответ: y=x+1–уравнение касательной;   y=-x-17–уравнение нормали.

Найти производную функции: $y=2\sqrt{x^3}-\frac{7}{x}+3x^2-\frac{2}{x^5}$.
Предварительно запишем функцию в виде, удобном для дифференцирования $y=2x^{3/2}-7x^{-1}+3x^2-2x^{-5}$, тогда $y'=3x^{1/2}+7x^{-2}+6x+10x^{-6}=$ $3\sqrt{x}+\frac{7}{x^2}+6x+\frac{10}{x^6}$..

Ответ: $y'=3\sqrt{x}+\frac{7}{x^2}+6x+\frac{10}{x^6}$.

2. Дифференцирование сложной функции.

Найти производные данных функций в произвольной точке:

а) $y=\frac{1+\cos^2 x}{1+\sin 5x}$

Воспользуемся правилами и формулами нахождения производной:

- производная частного 2-х функций $(\frac{u}{v})'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

- производная сложной функции $(f(u(x)))'=f'(u(x))\cdot u'(x)$

-формулами $(\sin x)'=\cos x$ $\quad(\cos x)'=-\sin x$ $\quad(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$

$$y'=(\frac{1+\cos^2 x}{1+\sin 5x})'=\frac{\left(1+\cos^2 x\right)'\cdot(1+\sin 5x)-\left(1+\cos^2 x\right)\cdot(1+\sin 5x)'}{(1+\sin 5x)^2}=$$

$$=\frac{-2\cos x\cdot\sin x\cdot(1+\sin 5x)-\left(1+\cos^2 x\right)\cdot 5\cos 5x}{(1+\sin 5x)^2}$$

б) $y=x\cdot\arcsin 2x+arctg 3x$

Воспользуемся правилами и формулам нахождения производной:

- производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

- производная суммы 2-х функций $(u+v)' = u' + v'$

- производная произведения 2-х функций $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

- формулами $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad (arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$(x \cdot \arcsin 2x + arctg3x)' = x' \cdot \arcsin 2x + x \cdot (\arcsin 2x)' + (arctg3x)' = \arcsin 2x +$$
$$+ \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{3}{1+9x^2}$$

в) $y = 5^{\sin 2x} - \sqrt[3]{x} \cdot tg2x$

Воспользуемся правилами и формулам нахождения производной:

- производная сложной функции $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

-производная суммы 2-х функций $(u+v)' = u' + v'$

- производная произведения 2-х функций $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

- формулами $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$; $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $(\sin x)' = \cos x$;

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$$y' = \left(5^{\sin 2x} - \sqrt[3]{x} \cdot tg2x\right)' = 5^{\sin 2x} \cdot \ln 5 \cdot 2\cos 2x - \frac{tg2x}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{2 \cdot \sqrt[3]{x}}{\cos^2 2x};$$

в) $y = \mathrm{arctg}^2(5x) \cdot \ln(x-4)$.

$y' = (\mathrm{arctg}^2(5x))' \cdot \ln(x-4) + \mathrm{arctg}^2(5x) \cdot (\ln(x-4))' = 2\mathrm{arctg}(5x) \cdot (\mathrm{arctg}(5x))' \ln(x-4) + \mathrm{arctg}^2(5x) \cdot$

$$\frac{1}{x-4} \cdot (x-4)' = 2\mathrm{arctg}(5x) \cdot \frac{1}{1+(5x)^2} \cdot (5x)' \cdot \ln(x-4) + \frac{\mathrm{arctg}^2(5x)}{x-4} =$$

$$= \frac{10\mathrm{arctg}(5x) \cdot \ln(x-4)}{1+25x^2} + \frac{\mathrm{arctg}^2(5x)}{x-4}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{10\mathrm{arctg}(5x) \cdot \ln(x-4)}{1+25x^2} + \dfrac{\mathrm{arctg}^2(5x)}{x-4}$.

г)

$$y = \sqrt[5]{(x+4)^3} + \frac{x}{tgx} = (x+4)^{\frac{3}{5}} + \frac{x}{tgx}.$$

$$y' = \frac{3}{5}(x+4)^{\frac{3}{5}-1} + \frac{(x)'tgx - x(tgx)'}{tg^2 x} =$$

$$= \frac{3}{5}(x+4)^{-2/5} + \frac{tgx - \dfrac{x}{\cos^2 x}}{tg^2 x} =$$

$$=\frac{3}{5(x+4)^{\frac{2}{5}}}+\frac{tgx\cdot\cos^2x-x}{tg^2x\cdot\cos^2x}=\frac{3}{5\sqrt[5]{(x+4)^2}}+\frac{\sin x\cdot\cos x-x}{\sin^2x}.$$

Ответ: $y'=\dfrac{3}{5\sqrt[5]{(x+4)^2}}+\dfrac{\sin x\cdot\cos x-x}{\sin^2x}.$

3. Дифференцирование показательно-степенной функции. Дифференцирование неявной функции.

Применим метод логарифмического дифференцирования.

Прологарифмируем обе части.

$$\ln y=\cos x\cdot\ln(tgx).$$

Продифференцируем обе части по x

$$\frac{y'}{y}=-\sin x\cdot\ln(tgx)+\cos x\cdot\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2x};$$

$$y'=y(-\sin x\cdot\ln(tgx)+\frac{1}{\sin x});$$

$$y'=(tgx)^{\cos x}(-\sin x\cdot\ln(tgx)+\frac{1}{\sin x}).$$

$y=(\sin x)^{\arcsin x}$.

Применим метод логарифмического дифференцирования. Прологарифмируем обе части.

$$\ln y=\arcsin x\cdot\ln\sin x.$$

Продифференцируем обе части по x

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ln\sin x+\arcsin x\frac{1}{\sin x}\cos x;$$

$$y'=y(\frac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+ctgx\cdot\arcsin x);$$

$$y'=(\sin x)^{\arcsin x}(\frac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+ctgx\cdot\arcsin x).$$

Ответ: $y'=(\sin x)^{\arcsin x}(\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{1-x^2}}+ctgx\cdot\arcsin x).$

Дифференцирование неявной функции.

Найти первую и вторую производные неявной функции и функции, заданной параметрически.

а) $y=e^y+4x$.

Продифференцируем обе части по x

$y'=e^y\cdot y'+4$; $y'(1-e^y)=4$; (*) Отсюда $y'=\dfrac{4}{1-e^y}$.

Дифференцируем равенство (*) по x

$y''\cdot(1-e^y)+y'\cdot(-e^y)\cdot y'=0$. Отсюда $y''=\dfrac{e^y\cdot(y')^2}{1-e^y}$ Подставляя вместо y' его выражение, получим $y''=\dfrac{16e^y}{(1-e^y)^3}$.

Ответ: $y'=\frac{4}{1-e^{y}}$. $y''=\frac{16e^{y}}{(1-e^{y})^{3}}$.

б) $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\sqrt[3]{t-1} \end{cases}$

Первую и вторую производные найдем по формулам $y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}$
$y''_x=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''_t\cdot x'_t-x''_t\cdot y'_t}{(x'_t)^3}$

Найдем

$x'_t=(t^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$; $y'_t=((t-1)^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}(t-1)^{-\frac{2}{3}}$.

$x''_t=-\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}$; $y''_t=-\frac{2}{9}(t-1)^{-\frac{5}{3}}$. Тогда $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1}{3}(t-1)^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}=\frac{2\sqrt{t}}{3\sqrt[3]{(t-1)^2}}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-\frac{2}{9}\cdot(t-1)^{-\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}\cdot t^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{3}\cdot(t-1)^{-\frac{2}{3}}}{\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)^3}=$$

$$=\frac{8}{36}\frac{(t-1)^{-\frac{5}{3}}\cdot t^{-\frac{3}{2}}}{t^{-\frac{3}{2}}}\left(-4t+3(t-1)\right)=\frac{-2(t+3)}{9\sqrt[3]{(t-1)^5}}.$$

Ответ: $\frac{dy}{dx}=\frac{2\sqrt{t}}{3\sqrt[3]{(t-1)^2}}$. $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-2(t+3)}{9\sqrt[3]{(t-1)^5}}$.

3.6.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили понятие производной функции в точке, ее геометрический, физический смысл;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые при нахождении производной функции по правилам дифференцирования;
- выработали навыки по нахождению производной сложной, обратной функции в точке , применению логарифмической производной.

3.7 Практическое занятие 12-13 (ПЗ-12-13) (4 ч.)

Тема: Производная функции в точке, ее геометрический, экономический, физический смысл, правила дифференцирования, приложения

3.7.1 Задание для работы:

1. Исследование функции методами дифференциального исчисления.
2. Изопараметрические задачи.

3.7.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Исследование функции методами дифференциального исчисления.

Провести полное исследование функции и построить ее график

$$\textbf{а)}\ y = \frac{x^3+4}{x^2}.$$

Решение

1)Область определения функции $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.Функция непрерывна в области определения, x=0–точка разрыва. Найдем односторонние пределы

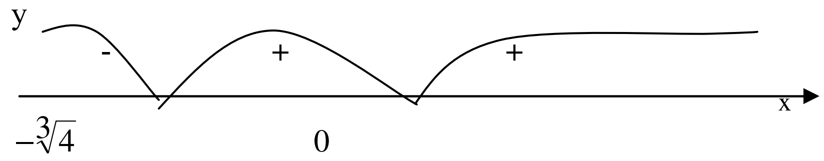
$$\lim_{x\to 0-0}\frac{x^3+4}{x^2}. = +\infty,\quad \lim_{x\to 0+0}\frac{x^3+4}{x^2} = +\infty.$$

Следовательно, x=0–вертикальная асимптота.

2) $y(-x) = \frac{(-x)^3+4}{(-x)^2}. = \frac{4-x^3}{x^2} \neq \pm y(x)$. Следовательно, функция общего вида.

3) Точек пересечения с осью Oy нет.

Точка пересечения с осью Ox определяется из уравнения $x^3+4=0$; $x=-\sqrt[3]{4}\approx 1{,}59$, т. е. точка пересечения с осью Ox-($-\sqrt[3]{4}$; 0)

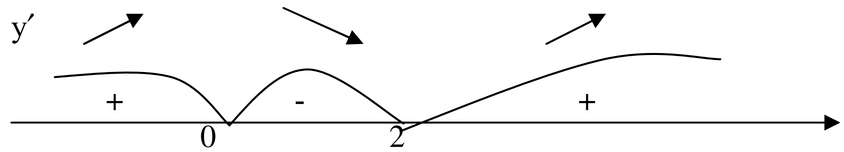


В интервале (-∞;$-\sqrt[3]{4}$) y<0; в интервале ($-\sqrt[3]{4}$; 0) y>0; в интервале (0;+∞) y>0;

4)Исследуем функцию на возрастание, убывание, точки экстремума.

$$y' = \frac{3x^2\cdot x^2-(x^3+4)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x^3-8}{x^3}.$$

$y'=0$ при x=2, y' не существует при x=0.



Таким образом

(-∞,) $y'>0$, функция возрастает; (0,2) $y'<0$, функция убывает.

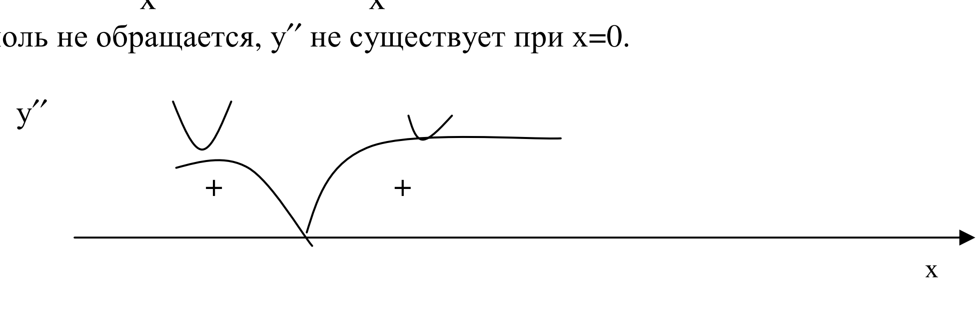
(2,+∞) $y'>0$, функция возрастает.

В точке x=2 функция имеет минимум $y_{min}=12/4=3$.

5)Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

$$y'' = \frac{3x^2\cdot x^3-(x^3-8)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{24}{x^4}.$$

y'' в ноль не обращается, y'' не существует при x=0.



0

(-∞,0) $y''>0$, функция вогнута;

(0,+∞) $y''>0$, функция вогнута.

Точек перегиба нет (так как при x=0 функция не определена).

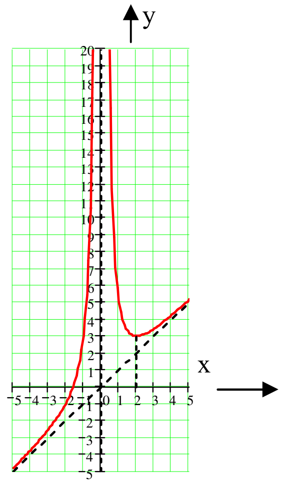
6) Найдем наклонную асимптоту.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x^3})=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^3+4}{x^2}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}=0$$

Следовательно, y=x–наклонная асимптота.

7) Сделаем чертеж



$$\textbf{б)}\ y=\frac{x}{x^2-1}.$$

Решение

1)Область определения функции $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty)$.Функция непрерывна в области определения, x=-1 и x=1–точки разрыва. Найдем односторонние пределы

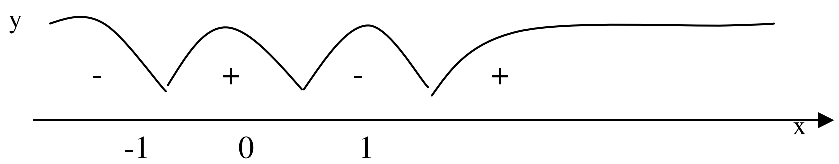
$$\lim_{x\to-1-0}\frac{x}{x^2-1}.=-\infty,\ \lim_{x\to-1+0}\frac{x}{x^2-1}.=+\infty,\ \lim_{x\to1-0}\frac{x}{x^2-1}.=-\infty,\ \lim_{x\to1+0}\frac{x}{x^2-1}.=+\infty.$$

Следовательно x=-1 и x=1–вертикальные асимптоты.

$$2)\ y(-x)=\frac{-x}{(-x)^2-1}.=-\frac{x}{x^2-1}=-y(x)\ .$$

Следовательно функция нечетная.

3) Точка пересечения с осями (0,0).



В интервале (-∞;-1) y<0;

В интервале (-1;0) y>0;

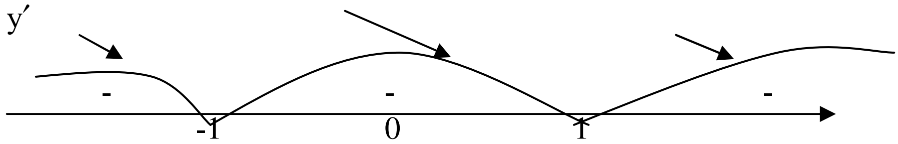
В интервале (0;1) y<0;

В интервале (1;+∞) y>0;

4)Исследуем функцию на возрастание, убывание, точки экстремума.

$$y'=\frac{x^2-1-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}.$$

$y'<0$ во всей области определения.



Таким образом

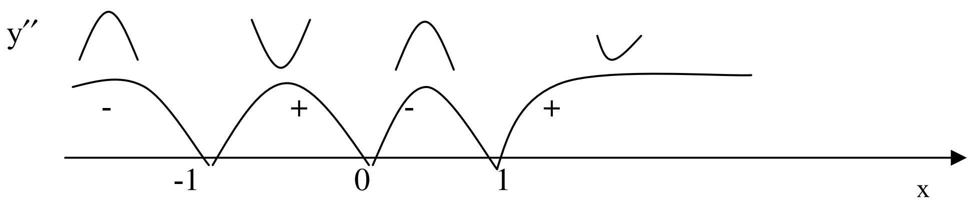
(-∞,-1) $y'<0$, функция убывает; (-1,1) $y'<0$, функция убывает; (1,+∞) $y'<0$, функция убывает.

Экстремумов нет.

5)Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба

$$y''=-\frac{2x(x^2-1)^2-(x^2+1)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=-\cdot\frac{2x(x^2-1)}{(x^2-1)^4}\cdot(x^2-1-2x^2-2)=2\cdot\frac{x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

$y''=0$ при $x=0$, y'' не существует при $x=\pm 1$.



(-∞,-1) $y''<0$, функция выпукла;

(-1, 0) $y''>0$, функция вогнута;

(0, 1) $y''<0$, функция выпукла;

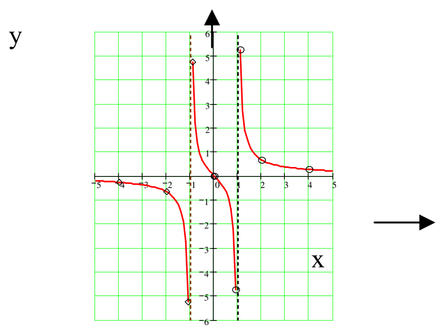
(1,+∞) $y''>0$, функция вогнута.

При x=0 имеем точку перегиба $y_{пер}=y(0)=0$.

6) Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}$ =0, то y=0–горизонтальная асимптота (частный случай наклонной).

Найдем несколько дополнительных точек и сделаем чертеж

x	0,9	1,1	2	4
f(x)	-4,74	5,24	0,67	0,27

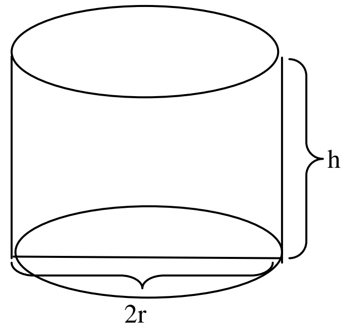


2. Изопараметрические задачи.

1. Требуется изготовить из жести ведро цилиндрической формы без крышки данного объема V. Каковы должны быть высота ведра и радиус его дна, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество жести?

Решение

Обозначим:
h-высота ведра;
r-радиус дна.
Сделаем чертеж



По условию

$$V=\pi r^2\cdot h \qquad (1)$$

Полная поверхность

$$S=S_{осн}+S_{бок}=\pi r^2+2\pi rh \qquad (2)$$

Выразим h из уравнения (1)

$$h=V/\pi r^2$$

и подставим в (2). Получим

$$S=\pi r^2+\frac{2V}{r}.$$

Таким образом, получили функцию от r. Исследуем эту функцию при $r\in(0,\infty)$.

$$\frac{dS}{dr}=2\pi r-\frac{2V}{r^2}=0;$$

$$\pi r^3=V;$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Так как $\frac{d^2S}{dr^2}=2\pi+\frac{4V}{r^3}>0$ при $r\in(0,+\infty)$, то функция имеет в данной точке минимум. При этом

$h=\frac{V}{\pi r^2}=\frac{V}{\pi\sqrt[3]{\frac{V^2}{\pi^2}}}=\frac{V}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{V^2}}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \quad (=r)$.Таким образом, у ведра оптимальных размеров $h=r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке

$$y=4-x-\frac{4}{x^2} \qquad [1;4]$$

Решение

1. Находим производную

$$y'=-1+\frac{8}{x^3}.$$

2. Находим критические точки

Производная равна нулю

$$-1+\frac{8}{x^3}=0.$$

$$x^3=8$$

$$x=2\in[1;4]$$

Производная не существует при $x=0\notin[1;4]$

3. Находим значения функции в точках x=1, x=2, x=4.

y(1)=4-1-4=-1; y(2)=4-2-1=1; y(4)=4-4-1/4=-0,25.

4. Выбираем наименьшее и наибольшее значения

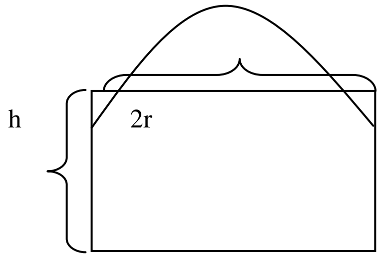
$y_{наим}$=y(1)=-1, $y_{наиб}$=y(2)=1.

Ответ: $y_{наим}$=y(1)=-1, $y_{наиб}$=y(2)=1.

3.Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен а. При каких размерах сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

Решение

Сделаем чертеж



Для того, чтобы окно пропускало наибольшее количество света, нужно сделать площадь окна максимальной. Выразим площадь окна через h и r.

$$S=2\cdot h\cdot r+\pi r^2/2$$

По условию известен периметр

$$P=2h+2r+\pi r=a$$

Отсюда $h=\dfrac{a-\pi r-2r}{2}$

Подставляя в выражение для площади, получим

$S=(a-\pi r-2r)\cdot r+\pi r^2/2=ar-2r^2-\pi r^2/2=ar-(2+\pi/2)r^2=ar-\dfrac{(4+\pi)r^2}{2}$.

Исследуем эту функцию при $r\in[0,\dfrac{a}{\pi+2}]$. (При больших значениях r получим h<0).

$$\frac{dS}{dr}=a-(4+\pi)r=0;$$

$$r=\frac{a}{4+\pi}.$$

Вычислим значения S в точках r=0, $\dfrac{a}{4+\pi}$, $\dfrac{a}{2+\pi}$ S(0)=0;

$$S(\frac{a}{4+\pi})=a\cdot\frac{a}{4+\pi}-\frac{(4+\pi)}{2}\cdot\frac{a^2}{(4+\pi)^2}=\frac{a^2}{(4+\pi)}\cdot(1-\frac{1}{2})=\frac{a^2}{2(4+\pi)}\approx 0{,}07a^2.$$

$$S(\frac{a}{2+\pi})=a\cdot\frac{a}{2+\pi}-\frac{4+\pi}{2}\cdot\frac{a^2}{(2+\pi)^2}=\frac{a^2}{2(2+\pi)^2}\cdot(4+2\pi-4-\pi)=\frac{a^2\pi}{2(2+\pi)^2}\approx 0{,}059a^2$$

Таким образом наибольшее значение площади получится при $r=\dfrac{a}{4+\pi}$, при этом h=

$\dfrac{a-(2+\pi)r}{2}=\dfrac{a}{2}(1-\dfrac{2+\pi}{4+\pi})=\dfrac{a}{4+\pi}$. Таким образом ширина оптимального окна (2r) в два раза больше высоты.

3.7.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили необходимое, достаточное условие существования экстремума, точки перегиба, теорему о монотонности дифференцируемой функции, теорему о форме кривой, достаточное условие существования асимптоты;
- усвоили основные алгоритмы, применяемые при исследовании функции методами дифференциального исчисления;
- выработали навыки применения дифференциального исчисления для решения оптимизационных задач.

3.8 Практическое занятие 14-16 (ПЗ-14-16) (6 ч.)
Тема: Первообразная функции, неопределенный интеграл, его свойства, основные методы интегрирования

3.8.1 Задание для работы:

1. Таблица основных первообразных. Теорема звездочка. Метод непосредственного интегрирования.
2. Метод интегрирования подстановкой.
3. Метод интегрирования по «частям»

3.8.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Таблица основных первообразных. Теорема звездочка. Метод непосредственного интегрирования.

1. Найдите неопределенные интегралы.

$$\int (2x^5 - \sqrt[3]{x} + 3)dx$$

Решение:

$$\int (2x^5 - \sqrt[3]{x} + 3)dx = 2\int x^5 dx - \int x^{1/3} dx + 3\int dx = 2\frac{x^{5+1}}{5+1} - \frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + 3x + C =$$

$$\frac{x^6}{3} - \frac{3}{4}x^{4/3} + 3x + C.$$

Ответ: $\int (2x^5 - \sqrt[3]{x} + 3)dx = \frac{x^6}{3} - \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + 3x + C.$

$$\int \frac{3x^2 - 5x + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

Решение:

$$\int \frac{(3x^2 - 5x + 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int \left(\frac{3x^2}{x^{2/3}} - \frac{5x}{x^{2/3}} + \frac{2}{x^{2/3}} \right) dx = 3\int x^{4/3} dx - 5\int x^{1/3} dx + 2\int x^{-2/3} dx =$$

$$3\frac{x^{4/3+1}}{4/3+1} - 5\frac{x^{1/3+1}}{1/3+1} + 2\frac{x^{-2/3+1}}{-2/3+1} + C = \frac{9x^{7/3}}{7} - \frac{15x^{4/3}}{4} + 6x^{1/3} + C =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x}}{28}\left(36x^2 - 105x + 168\right) + C.$$

Ответ: $\int \frac{(3x^2 - 5x + 2)}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \frac{\sqrt[3]{x}}{28}\left(36x^2 - 105x + 168\right) + C.$

$$\int \frac{1+x^3-5x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$$

Решение:

$$\int \frac{(1+x^3-5x\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{1}{x^{1/2}}+\frac{x^3}{x^{1/2}}-\frac{5x^{4/3}}{x^{1/2}}+\right)dx = \int x^{-1/2}dx+\int x^{5/2}dx-5\int x^{5/6}dx+=$$

$$\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1}+\frac{x^{5/2+1}}{5/2+1}-5\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C = 2x^{1/2}+\frac{2x^{7/2}}{7}-\frac{30x^{11/6}}{11}+C=$$

$$=2\sqrt{x}+\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{30}{11}x\sqrt[6]{x^5}+C.$$

Ответ: $\int \frac{(1+x^3-5x\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}+\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\frac{30}{11}x\sqrt[6]{x^5}+C.$

2. Метод интегрирования подстановкой.

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}dx$$

Решение:

Применим замену переменной.

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}dx = \left|\begin{array}{l} 1+x^3=t \\ 3x^2dx=dt \\ x^2dx=\frac{1}{3}dt \end{array}\right| = \frac{1}{3}\int\frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t|+C = \frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C.$$

Ответ: $\int \frac{x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C.$

$$\int \frac{ln^6 x}{x}dx$$

Решение:

Применим замену переменной.

$$\int \frac{ln^6 x}{x}dx = \left|\begin{array}{l} ln\,x = t \\ \frac{dx}{x}=dt \end{array}\right| = \int t^6 dt = \frac{t^7}{7}+C = \frac{ln^7 x}{7}+C.$$

Ответ: $\int \frac{ln^6 x}{x}dx = \frac{ln^7 x}{7}+C.$

$$\int \frac{\mathrm{arctg}^5 x}{1+x^2}dx$$

Решение:

Применим замену переменной.

$$\int \frac{\mathrm{arctg}^5 x}{1+x^2}dx = \left| \begin{matrix} \mathrm{arctg}x = t \\ \dfrac{dx}{1+x^2} = dt \end{matrix} \right| = \int t^5 dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{\mathrm{arctg}^6 x}{6} + C.$$

Ответ: $\int \frac{\mathrm{arctg}^5 x}{1+x^2}dx = \frac{\mathrm{arctg}^6 x}{6} + C.$

$$\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx$$

Решение:

Выделим в подкоренном выражении полный квадрат.

$$\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx = \int \frac{3x-4}{\sqrt{(x+3)^2-9+10}}dx = \int \frac{3x-4}{\sqrt{(x+3)^2+1}}dx =$$

$$\left| \begin{matrix} x+3=t \\ dx=dt \\ x=t-3 \end{matrix} \right| = \int \frac{3t-13}{\sqrt{t^2+1}}dt = 3\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} - 13\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = 3I_1 - 13I_2.$$

1) $I_1 = \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}} = \left| \begin{matrix} t^2+1=z \\ 2tdt=dz \\ tdt=\dfrac{1}{2}dz \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\int z^{-1/2}dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{1/2}}{1/2} = \sqrt{z} = \sqrt{t^2+1}.$

2) $I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln(t+\sqrt{t^2+1}).$

Таким образом

$$\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx = 3\sqrt{t^2+1} - 13\ln(t+\sqrt{t^2+1}) + C =$$

$$= 3\sqrt{(x+3)^2+1} - 13\ln(x+3+\sqrt{(x+3)^2+1}) + C =$$

$$= 3\sqrt{x^2+6x+10} - 13\ln(x+3+\sqrt{x^2+6x+10}) + C.$$

Ответ: $\int \frac{3x-4}{\sqrt{x^2+6x+10}}dx = 3\sqrt{x^2+6x+10} - 13\ln(x+3+\sqrt{x^2+6x+10}) + C.$

3. Метод интегрирования по «частям»

Найдите интеграл:

а) $\int x\cos\frac{2}{3}x dx$

Решение:

Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

$$\int x\cos\frac{2}{3}xdx = \left| \begin{array}{l} u = x;\ dv = \cos\frac{2}{3}xdx; \\ du = dx;\ v = \int\cos\frac{2}{3}xdx = \dfrac{\sin\frac{2}{3}x}{2/3} = \frac{3}{2}\sin\frac{2}{3}x. \end{array} \right| =$$

$$= \frac{3}{2}x\sin\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}\int\sin\frac{2}{3}xdx = \frac{3}{2}x\sin\frac{2}{3}x + \frac{9}{4}\cos\frac{2}{3}x + C.$$

Ответ: $\int x\cos\frac{2}{3}xdx = \frac{3}{2}x\sin\frac{2}{3}x + \frac{9}{4}\cos\frac{2}{3}x + C.$

$$\int x\sin\frac{4}{5}xdx$$

Решение:

Применим формулу интегрирования по частям.

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

$$\int x\sin\frac{4}{5}xdx = \left| \begin{array}{l} u = x;\ dv = \sin\frac{4}{5}xdx; \\ du = dx;\ v = \int\sin\frac{4}{5}xdx = -\dfrac{\cos\frac{4}{5}x}{4/5} = -\frac{5}{4}\cos\frac{4}{5}x. \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{5}{4}x\cos\frac{4}{5}x + \frac{5}{4}\int\cos\frac{4}{5}xdx = -\frac{5}{4}x\cos\frac{4}{5}x + \frac{25}{16}\sin\frac{4}{5}x + C.$$

Ответ: $\int x\sin\frac{4}{5}xdx = -\frac{5}{4}x\cos\frac{4}{5}x + \frac{25}{16}\sin\frac{4}{5}x + C.$

3.8.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные понятия, свойства, теоремы интегрального исчисления функции одной действительной переменной;
- усвоили алгоритмы непосредственного интегрирования, интегрирования методом подстановки, методом «по частям»;
- выработали навыки нахождения интегралов методом непосредственного интегрирования, интегрирования методом подстановки, методом «по частям».

3.9 Практическое занятие 17 (ПЗ-17) **(2 ч.)**

Тема: Определенный интеграл, его свойства, вычисление.

3.9.1 Задание для работы:

1.Определенный интеграл, его свойства. Метод непосредственного интегрирования в определенном интеграле.

2. Интегрирование определенного интеграла подстановкой.

3. Интегрирование определенного интеграла по «частям»

3.9.2 Краткое описание проводимого занятия:

1.Определенный интеграл, его свойства. Метод непосредственного интегрирования в определенном интеграле.

1. Вычислите определенные интегралы *a)* $\int_0^1 \sqrt[3]{6x+2}dx$

Решение:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{6x+2}dx = \int_0^1 (6x+2)^{1/3}dx = \frac{(6x+2)^{4/3}}{4/3\cdot 6}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}(8^{4/3} - 2^{4/3}) = \frac{1}{8}(16 - 2\sqrt[3]{2}) =$$

$$= 2 - \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \approx 1,685.$$

Ответ: $\int_0^1 \sqrt[3]{6x+2}dx = 2 - \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \approx 1,685.$

Вычислите определенные интегралы.

c) $\int_0^2 \sqrt{4x+1}dx$

Решение:

$$\int_0^2 \sqrt{4x+1}dx = \int_0^2 (4x+1)^{1/2}dx = \frac{(4x+1)^{3/2}}{3/2\cdot 4}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{6}(9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}.$$

Ответ: $\int_0^2 \sqrt{4x+1}dx = \frac{13}{3}.$

d) $\int_0^{\pi/4} \cos^2 2xdx$

Решение:

Воспользуемся тригонометрической формулой $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2xdx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 4x}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4}\right) - 0 = \frac{\pi}{8}.$$

Ответ: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2xdx = \frac{\pi}{8} \approx 0,393.$

2. Интегрирование определенного интеграла подстановкой.

$$\int_0^1 \frac{2x}{e^{x^2}}dx$$

Решение:

$$\int_0^1 \frac{2x}{e^{x^2}}dx = \begin{vmatrix} x^2 = u; \text{ Если } x = 0, \text{то } u = 0; \\ 2xdx = du; \text{ Если } x = 1, \text{то } u = 1; \end{vmatrix} = \int_0^1 e^{-u}du = -e^{-u}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632.$$

Ответ: $\int_0^1 \frac{2x}{e^{x^2}}dx = 1 - e^{-1} \approx 0{,}632.$

$$\int_1^2 \sqrt{5x - 1}dx$$

а) $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+1} = \begin{vmatrix} x+1 = t^3 \\ dx = 3t^2dt \end{vmatrix} =$ Найдем новые пределы интегрирования $\begin{vmatrix} x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 7 \Rightarrow t = 2 \end{vmatrix} =$

$$\int_1^2 \frac{3t^2dt}{t+1} = 3\int_1^2 \frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt = 3\int_1^2 (t - 1 + \frac{1}{t+1})dt =$$

$$3(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|)|_1^2 = 3(2 - 2 + \ln 3) - 3(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2) = 1{,}5 + 3\ln 3 - 3\ln 2 =$$

$$= 1{,}5 + 3\ln 1{,}5 \approx 2{,}716$$

Ответ: $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+1} = 1{,}5 + 3\ln 1{,}5 \approx 2{,}716$

3. Интегрирование определенного интеграла по «частям»

$\int_0^1 \ln(1 + x^2)\,dx =$
$\Big($Пусть $u = \ln(1 + x^2) \Rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2}dx, dv = dx \Rightarrow v =$
x, т. е. интегрируем левую и правую части$\Big) = x \cdot \ln(1 + x^2)\,|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$
$(ln2 - ln1) - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = ln2 - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = ln2 - 2(x - arktgx)|_0^1 =$
$ln2 - 2x|_0^1 + 2arktgx|_0^1 = ln2 - 2 + \frac{2\pi}{4} = ln2 - 2 + \frac{\pi}{2}$
$\int_0^\pi x^2cosxdx =$ (Пусть $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx, v = cosx \Rightarrow v =$
$sinx$, т. е. интегрируем левую и правую части) $= x^2 \cdot sinx|_0^\pi - 2\int_0^\pi x \cdot sinxdx =$
$-2\int_0^\pi xsinxdx = (u = x \Rightarrow du = dx, dv = sinx \Rightarrow v = -cosx) = -(\cos x \cdot x)|_0^\pi +$
$\int_0^\pi cosxdx = \pi + sinx|_0^\pi = \pi + 0 = \pi$

3.9.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:
- освоили основные понятия, свойства, теоремы, связанные с определенным интегралом;
- усвоили алгоритмы нахождения определенного интеграла методом непосредственного интегрирования, интегрирования методом подстановки, методом «по частям»;
- выработали навыки нахождения определенных интегралов методом непосредственного интегрирования, интегрирования методом подстановки, методом «по частям»;

3.10 Практическое занятие 18 (ПЗ-18) **(2)**
Тема: Приложения определенного интеграла.

3.10.1 Задание для работы:

1. Вычисление площади плоской фигуры

2. Вычисление объема тела вращения

3.10.2 Краткое описание проводимого занятия:

1. Вычисление площади плоской фигуры

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями.

$y=x^2-4$ и $y=4-x^2$.

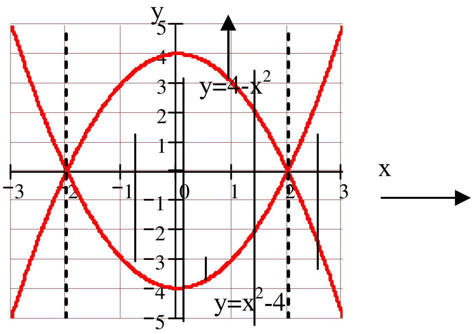
Решение:

Обе линии являются параболами.
Вершина первой параболы находится в точке (0; -4). Ветви направлены вверх.
Вершина второй параболы находится в точке (0; 4). Ветви направлены вниз.
Найдем точки пересечения этих линий.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \quad x^2 - 4 = 4 - x^2, \quad 2x^2 = 8, \quad x^2 = 4,$$

$$x_{1,2} = \pm 2,\ x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0.$$

Сделаем чертеж:



Площадь найдем по формуле $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$

$$S = \int_{-2}^{2} [(4 - x^2) - (x^2 - 4)]dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx = \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right) = \frac{64}{3}\text{(кв.ед.)}.$$

Ответ: Искомая площадь 64/3 (кв. ед.).

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями.

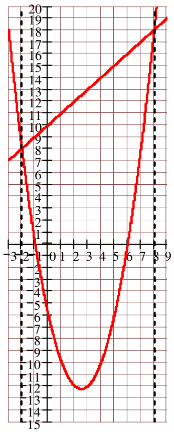
$y=x^2-5x-6$ и $y=x+10$.

Решение:

Первая линия является параболой, вторая - прямой. Для построения параболы преобразуем ее уравнение: $y=x^2-2\cdot 2{,}5\cdot x+2{,}5^2-2{,}5^2-6$; $y=(x-2{,}5)^2-12{,}25$; $y+12{,}25=(x-2{,}5)^2$.
Из последнего уравнения следует, что вершина параболы находится в точке
(2,5; -12,25), а ось симметрии параллельна оси Оу. Найдем точки пересечения этих линий

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x - 6 \\ y = x + 10 \end{cases} \quad x^2 - 5x - 6 = x + 10, \quad x^2 - 6x - 16 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{2},$$

x_1=-2, x_2=8, y_1=8, y_2=18.Сделаем чертеж:



Площадь найдем по формуле $S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$

$$S = \int\limits_{-2}^{8} [x + 10 - x^2 + 5x + 6]dx = \int\limits_{-2}^{8} (6x + 16 - x^2)dx = \left(3x^2 + 16x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{8} =$$

$$= \left(192 + 128 - \frac{512}{3}\right) - \left(12 - 32 + \frac{8}{3}\right) = 340 - \frac{520}{3} = 166\frac{2}{3}(\text{кв.ед.}).$$

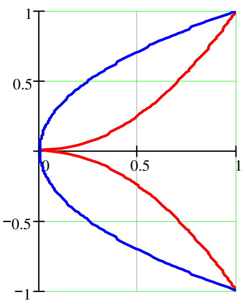
Ответ: Искомая площадь 166 2/3 (кв. ед.).

2. Вычисление объема тела вращения

Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной параболами $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$

Решение:

Сделаем чертеж:



Объем тела вращения найдем по формуле

$$V = \pi \int\limits_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]dx, \text{ или } V = \pi \int\limits_0^1 [x - x^4]dx = \pi\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}\pi.$$

Ответ: Объем тела вращения равен $\frac{3}{10}\pi \approx 0{,}942$ (куб. ед.)

3.10.3 Результаты и выводы: В результате проведенного занятия студенты:

- освоили основные формулы для вычисления площади плоской фигуры, объема тел вращения и условия их применения;
- усвоили алгоритмы нахождения площади плоской фигуры, объема тел вращения.