ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Информатика и прикладная математика»

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Математика

Направление подготовки: 39.03.02 Социальная работа
Профиль: Социальная работа в системе социальных служб
Квалификация (степень) выпускника: бакалавр
Форма обучения: очная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Элементы теории матриц и определителей	-	-	-		4
2	Системы линейных уравнений и методы их решения	-	-	-	2	6
3	Прямая на плоскости, метрическая теория прямых.	-	-	-	-	4
4	Кривые второго порядка	-	-	-	4	
5	Функции одной действительной переменной, их классификация, основные понятия	-	-	-		2
6	Предел и непрерывность функции в точке.	-	-	-	4	6
7	Производная функции в точке, ее геометрический, экономический, физический смысл, правила дифференцирования, приложения	-	-	-	4	8
8	Первообразная функции, неопределенный интеграл, его свойства, основные методы интегрирования	-	-	-		6
9	Определенный интеграл, его свойства, вычисление.	-	-	-	2	2
10	Приложения определенного интеграла.				4	5
Итого в соответствии с РПД		-	-	-	20	43

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

5.2.1.1 Исследование СЛУ. Ранг матрицы. Критерий Кронекера- Копелли

Ранг матрицы

Для решения и исследования математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матриц.

В матрице $A_{m\times n}$ вычеркиванием каких-либо строк, столбцов можно вычленить подматрицу к-го порядка ($k \le \min(m,n)$)

Определители таких подматриц называют **минорами к-го** порядка.

Рангом матрицы А называется наивысший порядок, отличных от нуля, миноров этой матрицы. Обозначение: rangA, r(A)

Из определения следует что, $r(A)\le\min(m,n)$

Пример: вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ по определению.

Решение: так как $A_{3x4}\Rightarrow r(A)\le\min(3,4)=3$

Проверим, равен ли r(A)=3,то есть вычислим все миноры 3-го порядка

$M_3^1=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -3\end{vmatrix}=0$ $M_3^2=\begin{vmatrix}1 & 0 & 4\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}=0$ $M_3^3=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{vmatrix}=0$ $M_3^4=\begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0$

Так как все миноры 3-го порядка равны 0, следовательно, $r(A)\le 2$

Проверим, есть ли миноры 2-го порядка $\neq 0$, например $\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow$

$r(A)=2$

Мы рассмотрели общий случай определения ранга матриц, а именно перебор всех миноров. Этот способ трудоемок.

Для облегчения задачи используют преобразования, сокращающие нахождение ранга матрицы:

1.Отбрасывание нулевой строки, столбца.

2.Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число $\neq 0$

3.Изменение порядка строки (столбца)

4.Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

5.Транспонирование матрицы.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

С помощью элементарных преобразований можно матрицу привести к ступенчатому виду:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}a_{1k}\\ 0a_{22}\ldots\ldots a_{2n}a_{2k}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 00\ldots\ldots\ldots a_{nn}a_{rk}\end{pmatrix},\quad \begin{matrix}a_{ij}\neq 0\\ i=1,\ldots.r,\, r\le k\end{matrix}$$

Замечание: Ранг ступенчатой матрицы равен r, так как существует минор r-го порядка $\neq 0$:

$$\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}\ldots a_{1r}\\ 0a_{22}\ldots\ldots a_{2r}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 00\ldots\ldots\ldots a_{rr}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdot\ldots.a_{rr}\neq 0$$

Пример: найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ с помощью элементарных преобразований.

Решение: так как a_{11}=0 поменяем местами 1,2 строки, чтобы $a_{11} \neq 0$, получим $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ добьемся, чтобы ниже a_{11} в 1 столбце все элементы равны 0 умножением 1строки на числа 2,1и прибавим соответственно к 3,4строкам, получим

$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ $a_{22} \neq 0$, добьемся, чтобы все элементы 2 столбца ниже a_{22} были равны 0, получим $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; отбросим нулевую строку, получим матрицу ступенчатого вида, она содержит минор 2-го порядка, например, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \\ i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases} \quad (1)$$

Наряду с основной матрицей системы $A=(a_{ij})$ рассмотрим еще и так называемую расширенную матрицу A_1, полученную присоединением к Aстолбца свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Вопрос о совместности системы полностью решается следующей теоремой.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы этой системы равен рангу её основной матрицы.

Эта теорема только утверждает существование, но не дает, однако, никакого способа для практического разыскания всех решений системы.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4+9x_5=1 \\ x_1-2x_2+3x_3-4x_4+5x_5=2 \\ 2x_1+11x_2+12x_3+25x_4+22x_5=4 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 \end{pmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}=1-6=5\neq 0 \qquad RgA = 2.$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{pmatrix} \qquad RgA^* = 3.$$

Система несовместна.

Пример. Определить совместность системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1-4x_2=-1 \\ 3x_1+2x_2=4 \\ 7x_1+10x_2=12 \\ 5x_1+6x_2=8 \\ 3x_1-16x_2=-5 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \\ 7 & 10 \\ 5 & 6 \\ 3 & -16 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2+12=14\neq 0; \quad RgA = 2;$$

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \\ 5 & 6 & 8 \\ 3 & -16 & -5 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 14 & 7 \\ 0 & 38 & 19 \\ 0 & 26 & 13 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0. \qquad RgA^* = 2.$$

Система совместна. Решения: $x_1 = 1$; $x_2 = 1/2$.

Пример: решить систему линейных уравнений и найти одно из базисных решений:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-2x_4=1 \\ -2x_1-3x_2+x_3+3x_4=3 \\ 5x_1+9x_2-10x_3-9x_4=0 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и с помощью элементарных преобразований приведем её к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & -10 & -9 & 0 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -5 \end{array}\right)\approx$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

r(A)=2, число переменных n=4, следовательно система имеет бесконечное множество решений. Определитель при переменных x_1 и x_2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, следовательно, их можно взять за основные. Остальные, неосновные переменные x_3 и x_4переносим в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3x_3 + 2x_4 + 1 \\ \quad x_2 = 5x_3 + x_4 + 5 \end{cases}$$

$$x_1 = -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1 = -2(5x_3 + x_4 + 5) + 3x_3 + 2x_4 + 1 =$$
$$-10x_3 - 2x_4 - 10 + 3x_3 + 2x_4 + 1 = -7x_3 - 9$$

$$\begin{cases} x_1 = -7x_3 - 9 \\ x_2 = 5x_3 + x_4 + 5 \end{cases}$$

$$\{(-7x_3 - 9; 5x_3 + x_4 + 5; x_3; x_4) x_3 \in R; x_4 \in R\}$$

Тем самым нашли общее решение системы:

$\{(-7x_3 - 9; 5x_3 + x_4 + 5; x_3; x_4) x_3 \in R; x_4 \in R\}$.

Чтобы найти базисное решение приравняем свободные переменные к нулю, т.е. $x_3=x_4=0$. Получим одно базисное решение (-9;5;0;0), т.к. взяли одну пару базисных переменных.

5.2.1.2 Кривые второго порядка, их канонические уравнения, свойства

1. Окружность

Кривые второго порядка - это линии на плоскости, координаты точек которых связаны уравнениями второй степени относительно x и yв декартовой системе координат. Рассмотрим следующие виды кривых второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность - это совокупность точек на плоскости, равноудаленных от одной фиксированной точки (центра). Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра называется радиусом окружности.

Каноническое уравнение окружности имеет вид:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad где \quad M(x_0, y_0)$ -центр окружности, R –радиус.

Пример: Построить линию, заданную уравнением $x^2 - x + y^2 - y = 0$.

Решение: Приведем к стандартному виду. Для этого выделим полный квадрат разности для x и для y.

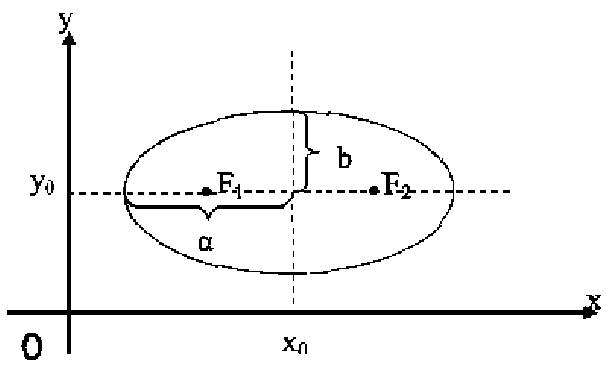
$$x^2 - 2x\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2y\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Приведя уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, видим, что наша кривая есть окружность с центром в точке $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ и $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. Эллипс



Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов примято обозначать через 2a. Фокусы эллипса обозначают буквами F_1 $и$ F_2, расстояние между ними - через 2c. По определению эллипса 2a >2c или a > c.

Данная фигура обладает двумя осями симметрии и центром симметрии.

Если фокусы (F_1 $и$ F_2) расположенные на прямой, параллельной оси OX, то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$ - центр эллипса, a $и$ b - большая и малая полуоси эллипса. Фокусы эллипса F_1 $и$ F_2 расположены в точках, удаленных на расстоянии $c=\sqrt{a^2-b^2}$ от центра эллипса.

Отношение $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается ε.

Пример: Определить вид кривой второго порядка

$$\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{2(y-3)^2}{36}=1$$

Решение:

$$\frac{(x+1)^2}{6^2}+\frac{(y-3)^2}{(3\sqrt{2})^2}=1$$

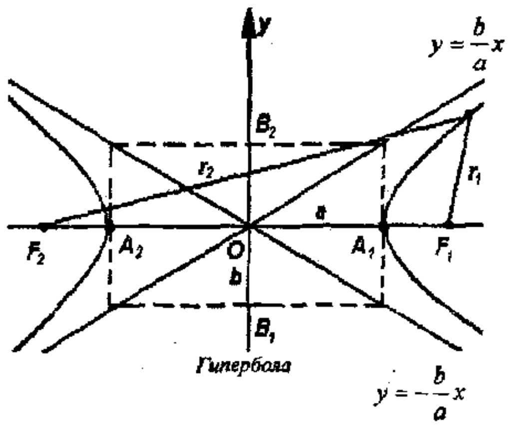
Наша линия есть эллипс с центром в точке A(-1,3), с большой полуосью a=6, малой полуосью $b=3\sqrt{2}$.

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-18}=3\sqrt{2}\approx 4{,}24$$

Фокусы:

$$F_1: x=-1-4{,}24=-5{,}24 \quad y=3$$

$$F_2: x=-1+4{,}24=3{,}24 \quad y=3$$



3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; указанная разность берется по абсолютному значению и обозначается обычно через 2a. Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 $и$ F_2 расстояние между ними - через 2c. По определению гиперболы 2a <2c или a < c.

Данная фигура также обладает двумя осями симметрии и центром. Если фокусы F_1 $и$ F_2 расположены на оси Ox, то ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$ - центр гиперболы, a $и$ b - действительная и мнимая полуось.

Прямые $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Пример: Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить простейшее уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{3}; \sqrt{2})$.

Решение: Согласно определению эксцентриситета, имеем

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2},\ \textit{или}\ \ c^2 = 2a^2.$$

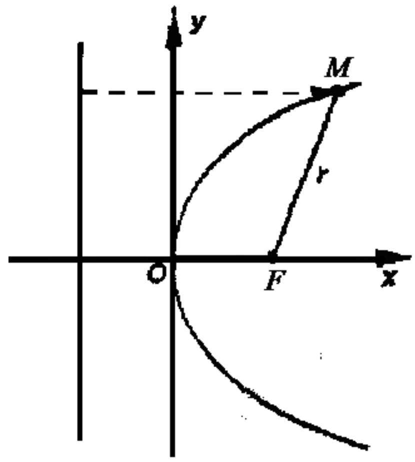
Но $c^2 = a^2 + b^2$, следовательно, $a^2 + b^2 = 2a^2,\ \textit{или}\ \ a^2 = b^2$, т.е. гипербола равнобочная.

Другое равенство получим из условия нахождения точки M на гиперболе, т.е.

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{b^2} = 1,\ \textit{или}\ \ \frac{3}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1.$$

Поскольку $a^2 = b^2$, получим

$$\frac{3}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1,\ \ \textit{т.е.}\ \ a^2 = 1$$



парабола

4. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Фокус параболы обозначается буквой F, расстояние от фокуса до директрисы - буквой p. Число p называется параметром параболы.

Фигура обладает осью симметрии. Если директриса параболы перпендикулярна Ox (Ox - ось симметрии), то уравнение параболы имеет вид:

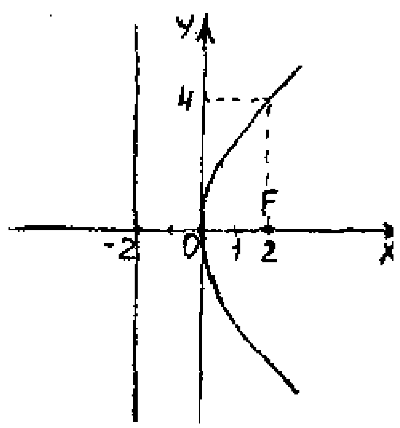
$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, где p - расстояние от фокуса до директрисы, точка (x_0; y_0) - вершина параболы.

Уравнение директрисы: $x = x_0 - \dfrac{p}{2}$.

Фокус в точке $F\left(x_0 + \dfrac{p}{2}; y_0\right)$.

Если Oy - ось симметрии, то уравнение параболы имеет вид: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$. Уравнение директрисы: $y = y_0 - \dfrac{p}{2}$. Фокус в точке $F\left(x_0; y_0 + \dfrac{p}{2}\right)$.

Пример: Построить параболу y^2=8x. Найти фокус и уравнение директрисы.



Решение; Сравнивая данное уравнение с уравнением параболы видим, что OX -ось симметрии. Вершина параболы находится в начале координат.

2p=8 следовательно p=4, а значит фокус имеет координаты F(2; 0), уравнение директрисы - y= - 2.

5.2.2.1 Эквивалентные бесконечно малые в окрестности функции, их свойства, приложения

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{f(x)} = 0$, то функция *f(x)* называется **бесконечно малой** в окрестности точки x_0.

Например: функция $y=x-4$ при $x \to 4$ является бесконечно малой.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{f(x)} = -\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{f(x)} = +\infty$, то функция называется **бесконечно большой** в окрестности точки x_0.

Например: $y=x^3$ при $x \to \infty$ является бесконечно большой

Замечание: данные выше определения справедливы и при $x \to \pm\infty$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых функций в окрестности некоторой точки есть функция бесконечно малая в окрестности той же точки;

2) произведение любого конечного числа бесконечно малых функций в окрестности некоторой точки есть функция, бесконечно малая в окрестности той же точки;

3) произведение бесконечно малой функции в окрестности некоторой точки на функцию ограниченную, есть функция, бесконечно малая в окрестности той же точки.

Бесконечно малые функции в окрестности некоторой точки x_0 $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка малости,** если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0 .$$

Если c=0 то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой функцией более высокого порядка малости** по сравнению с $\beta(x)$. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными** в окрестности точки x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Примеры. 1) Бесконечно малые $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}$ *и* $\beta(x) = \frac{3}{5x^2}$ - являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to \infty$, т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1 \cdot 5x^2}{x^2 \cdot 3} = \frac{5}{3} c \neq 0$.

2) При $x \to \infty$ $a(x) = \frac{1}{x^5}$ является бесконечной малой более высокого порядка чем $\beta(x) = \frac{1}{x}$, так как $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 \cdot x}{x^5 \cdot 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^4} = 0$.

3) При $x \to \infty$ $\alpha(x) = \frac{1}{x+5}$ *и* $\beta(x) = \frac{1}{x+18}$ являются эквивалентными бесконечно малыми, т.к. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{1 \cdot (x+18)}{(x+5) \cdot 1} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+18}{x+5} = 1$.

Предел бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}, если\ f(x)\sim f_1(x),\ \varphi(x)\sim\varphi_1(x).$$

5.2.2.2 Правила Лопиталя

Мы уже знакомы с приемами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, т.е. раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Рассмотрим новые правила для раскрытия этих неопределенностей – **правила Лопиталя**.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$) равен пределу отношения их производных $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\Psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\Psi'(x)}$, если предел правой части этого равенства существует.

Поясним на примерах.

Пример 1. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{1}=5\lim_{x\to 0}\cos 5x=5$$

Если отношение производных опять представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то можно снова применить правило Лопиталя, т.е. перейти к отношению вторых производных и т.д.

Пример 2. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$

Числитель и знаменатель дроби одновременно стремятся к нулю. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{16\sin 4x}{2}=8\lim_{x\to 0}\cos 4x=8$$

Пример 3. Найти $\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}$

Числитель и знаменатель дроби представляют собой бесконечно большие функции при $x\to\infty$. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Кроме рассмотренных случаев неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, правила Лопиталя позволяют раскрывать неопределенности других видов.

Неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела (здесь и в дальнейшем под c следует понимать как число, так и бесконечность) $\lim\limits_{x\to c}[\,f(\,x\,)-\Psi(\,x\,)]$, когда *f(x)* и *Ψ(x)* являются бесконечно большими функциями одного знака, т.е. $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=\infty$. Этот случай преобразованием выражения *(f(x)- Ψ(x))* сводится к неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$

Если $x\to 1$, то $\dfrac{1}{\ln x}\to\infty$ и $\dfrac{x}{\ln x}\to\infty$; следовательно имеем неопределенность вида (∞-∞). Приведем дроби к общему знаменателю, тогда при $x\to 1$ числитель и знаменатель в последнем выражении одновременно стремятся к нулю. Таким образом, получаем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Применяя правило Лопиталя, найдем

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)=(\,\infty-\infty\,)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{1}{x}}=-1\,.$$

Неопределенность вида (0·∞). Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[\,f(\,x\,)\Psi(\,x\,)]$, если $\lim\limits_{x\to c} f(\,x\,)=0$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(\,x\,)=\infty$. Этот случай также преобразованием выражения *(f(x) Ψ(x))* сводится к раскрытию неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)tgx$.

Так как $\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\to 0$ и $tgx\to\infty$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}$, то имеем неопределенность вида 0·∞. Преобразуем данное выражение так:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx=(\,0\cdot\infty\,)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{ctgx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-1$$

Неопределенность вида 1^{∞}. Под раскрытием такой неопределенности понимаем нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[\,f(\,x\,)]^{\Psi(\,x\,)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(\,x\,)=1$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(\,x\,)=\infty$.

Неопределенность вида 0^0. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[\,f(\,x\,)]^{\Psi(\,x\,)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(\,x\,)=0$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(\,x\,)=0$.

Неопределенность вида ∞^0. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim\limits_{x\to c}[\,f(\,x\,)]^{\Psi(\,x\,)}$, если $\lim\limits_{x\to c} f(\,x\,)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(\,x\,)=0$.

Неопределенности вида 1^∞, 0^0, и ∞^0 приводятся к случаям неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ обычно с помощью логарифмирования $[f(x)]^{\Psi(x)}$ при условии, что *f(x)>0.*

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

В этом случае $(1+x^2)\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$, и мы имеем неопределенность вида ∞^0. Обозначим $y=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$, т.к. $(1+x^2)>0$, то логарифмируя, находим

$$ln\ y = ln(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}ln(1+x^2) = \frac{ln(1+x^2)}{x}$$

Так как при $x\to+\infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, то получаем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} ln\ y = \lim_{x\to+\infty}\frac{ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0$$

Так как $z=lny$ – функция непрерывная на D_z, то $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\ y = ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} y\right)$; следовательно, $ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} y\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y = e^0 = 1$. Итак $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$.

5.2.3.1 Интеграл с переменны верхним пределом. Основная теорема математического анализа

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования a и b. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Если $x \in [a,b]$, то функция $f(x)$ также интегрируема на любом отрезке $[a, x]$. Если изменять верхний предел, не выходя из отрезка $[a, b]$, то величина интеграла будет изменяться, т. е. интеграл

$$\int_a^x f(t)dt$$

с постоянным нижним пределом a и переменным верхним пределом x есть функция верхнего предела. Обозначим эту функцию $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad (1)$$

Замечание. Для удобства переменная интегрирования здесь обозначена буквой t, так как буквой x обозначен верхний предел интегрирования. Интеграл (1) называется ***интегралом с переменным верхним пределом.***

Сформулируем основную теорему дифференциального и интегрального исчисления, устанавливающую связь между производной и интегралом.

Теорема. Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т. е.

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x) \qquad (2)$$

Эта теорема утверждает, что любая непрерывная функция на отрезке [*a, b*] имеет на нем первообразную, причем этой первообразной является функция $\Phi(x)$, а так как всякая другая первообразная функции $f(x)$ может отличаться от данной $\Phi(x)$ лишь на постоянную, то устанавливается связь между неопределенным и определенным интегралом

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$$

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [*a, b*], то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (3)$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$.

Формула (3) называется ***формулой Ньютона – Лейбница.*** Формулу Ньютона – Лейбница можно переписать как

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$ где $$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Вывод. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$ равен разности значений любой первообразной для верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Формула Ньютона – Лейбница открывает широкие возможности для вычисления определенных интегралов, так как задача сводится к задаче вычисления неопределенных интегралов.

Если считать переменным нижний предел интегрирования, то пользуясь формулой Ньютона – Лейбница, получим

$$\left(\int_x^b f(t)dt\right)'_x = -f(x) \qquad (4)$$

Теорема. Если $f(x)$ – непрерывная, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – дифференцируемые функции, то производная от интеграла $\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x)dx$ по переменной x

$$\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right)'_x = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x). \qquad (5)$$

П р и м е р. Найти производную по x от интеграла $F(x) = \int_{\ln x}^{x^2} e^{t^2} dt$.

Решение.

Здесь $f(t) = e^{t^2}; \varphi(x) = x^2; \psi(x) = \ln x; f(\varphi(x)) = e^{x^4}; f(\psi(x)) = e^{\ln^2 x} = e^{\ln x \ln x} = x^{\ln x}$.

$\varphi'(x) = 2x,\quad \psi'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}.$

Пользуясь формулой (5), получим

$$\left(\int_{\ln x}^{x^2} e^{t^2} dt\right)'_x = e^{x^4} 2x - x^{\ln x}\frac{1}{x} = \frac{2x^2 e^{x^4} - x^{\ln x}}{x}.$$

5.2.3.2 Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода

Определение: Пусть *f(x)* определена на [*a*, +∞) и для любого *b≥a* существует $\int_a^b f(x)dx$, тогда $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$ называется **несобственным интегралом первого рода от f(x).** Если этот предел конечен, то интеграл называется сходящимся, если предел бесконечен или вовсе не существует, то интеграл называется расходящимся.

Примеры:

1. $$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)^3} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{(x+1)^3} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b (x+1)^{-3}d(x+1) = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{(x+1)^{-2}}{-2}\right|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2(b+1)^2}+\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8} \Rightarrow$$ интеграл сходится.

2. $$\int_0^{+\infty}\frac{x^3dx}{x^4+1} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{x^3dx}{x^4+1} = \left|\begin{matrix} t = x^4+1 & \alpha = 0^4+1 = 1 \\ dt = 4x^3dx & \beta = b^4+1\end{matrix}\right| = \lim_{b\to+\infty}\int_1^{b^4+1}\frac{1}{4}\cdot\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty} ln|t|\Big|_1^{b^4+1} = \frac{1}{4}\lim_{b\to+\infty} ln\left|b^4+1\right| = +\infty \Rightarrow$$ интеграл расходится.

Определение: Пусть *f(x)* определена и интегрируема в [*a*, *b*-*ε*], $\forall\varepsilon : 0 < \varepsilon < b-a$ и неограниченна в [*b*-*ε*, *b*], тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ называется **несобственным интегралом второго рода.** Интеграл называется сходящимся, если этот предел конечен, и расходящимся, если предел бесконечен или не существует.

Пример: $$\int_0^1\frac{dx}{3\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{3\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{2}{3}\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\sqrt{\varepsilon}) = \frac{2}{3} \Rightarrow$$

интеграл сходится.

3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практическое занятие 1-2 (ПЗ-1-2) Элементы теории матриц и определителей

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- классификацию матриц;
- условия осуществления операций над матрицами;
- алгоритм перемножения матриц, нахождение обратной матрицы.
- свойства определителей;
- алгоритмы вычисления определителей третьего порядка;

- применение теоремы Муавра-Лапласа.

3.2 Практическое занятие 3-4 (ПЗ-3-4) СЛУ и методы их решения.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- условие существования и алгоритм нахождения обратной матрицы
- классификацию СЛУ по количеству решений;
- условия и алгоритмы применения метода Крамера и метода обратной матрицы к решению определенных СЛУ.
- особенности неопределенных систем; структуру решений СЛОУ;
- алгоритм применения метода Гаусса;
- понятие фундаментальной системы решений СЛУ и ее применение при нахождении общего решения.

3.3 Практическое занятие 5-6 (ПЗ-5-6) Прямая на плоскости, метрическая теория прямых.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- различные подходы к определению понятия вектора, классификацию векторов;
- алгоритмы выполнения операций над векторами в координатной форме;
- признак коллинеарности и ортогональности векторов, их свойства;
- построение системы координат.
- основные способы задания прямой на плоскости;
- активизацию геометрических знаний школьного курса;
- формулы для вычисления расстояния между точками, расстояния между точкой и прямой;
- аналитические условия, выражающие особенности взаимного расположения прямых на плоскости;
- признаки параллельности и ортогональности прямых, заданных уравнением с угловым коэффициентом.

3.4 Практическое занятие 7 (ПЗ-7) Функции одной действительной переменной, их классификация, основные понятия.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- понятие функции, способы ее задания;
- классификацию функций;
- элементы топологии.

3.5 Практическое занятие 8-9 (ПЗ-8-9) Предел и непрерывность функции в точке

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- причину введения понятия предела функции в точке, свойства функций, имеющих предел в точке;
- свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций;
- таблицу бесконечно малых, эквивалентных данным, алгоритмы вычисления предела функции в точках и на бесконечности, раскрытие неопределенностей.
- определения функции, непрерывной в точке, на множестве, понятие односторонних пределов, признак существования предела;
- алгоритм исследования функции на непрерывность и классификацию точек разрыва.

3.6 Практическое занятие 10-11 (ПЗ-10-11) Производная функции в точке, ее геометрический, экономический, физический смысл, правила дифференцирования, приложения.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- геометрический и физический смысл производной, уравнение касательной и нормали к кривой;
- правила дифференцирования; дифференцирование сложной, обратной, неявной функции, логарифмическое дифференцирование.

3.7 Практическое занятие 12-13 (ПЗ-12-13) Производная функции в точке, ее геометрический, экономический, физический смысл, правила дифференцирования, приложения

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- необходимое, достаточное условие существования экстремума, теорему о монотонности дифференцируемой функции;
- необходимое, достаточное условие существования точки перегиба, теорему об исследовании формы кривой;
- классификацию асимптот, достаточный признак наклонной асимптоты, признак вертикальной асимптоты.

3.8 Практическое занятие 14-16 (ПЗ-14-16) Первообразная функции, неопределенный интеграл, его свойства, основные методы интегрирования

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- свойства неопределенного интеграла;
- метод непосредственного интегрирования;
- метод интегрирования подстановкой;
- метод интегрирования «по частям».

3.9 Практическое занятие 17 (ПЗ-17) Определенный интеграл, его свойства, вычисление.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:
- условия применения формулы Ньютона-Лейбница;
- основные методы вычисления определенного интеграла;
- геометрический смысл определенного интеграла;

3.10 Практическое занятие 18 (ПЗ-18) Приложения определенного интеграла.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- формулы для вычисления площади плоской фигуры в декартовой, полярной системе координат, ограниченной плоской кривой, заданной параметрически;
- формулы для вычисления объема тел вращения;