ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ОРЕНБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Информатика и прикладная математика**»**

Методические рекомендации для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Математика

Направление подготовки (специальность) 39.03.02 Социальная работа
Форма обучения: заочная

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.1. Организационно-методические данные дисциплины

№ п.п.	Наименование темы	Общий объем часов по видам самостоятельной работы (*из табл. 5.1 РПД*)				
		подготовка курсового проекта (работы)	подготовка реферата/эссе	индивидуальные домашние задания (ИДЗ)	самостоятельное изучение вопросов (СИВ)	подготовка к занятиям (ПкЗ)
1	2	3	4	5	6	7
1	Элементы теории матиц и определителей. Элементы линейной алгебры	х	х	х	2	8
2	Элементы аналитической геометрии	х	х	х	4	8
3	Теория пределов и непрерывность функции в точке. Производная функции в точке, ее геометрический смысл.	х	х	х	6	8
4	Производная функции в точке, ее геометрический смысл. Правила дифференцирования функций, таблица производных.	х	х	х	4	8
5	Первообразная и неопределенный интеграл. Нахождение неопределённого интеграла	х	х	х	4	8
6	Определенный интеграл, его свойства, методы вычисления, приложения	х	х	х	35	6

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОМУ ИЗУЧЕНИЮ ВОПРОСОВ

5.2.1.1. Транспонирование матриц

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строк столбцами с с сохранением нумерации, называется **матрицей транспонированной к данной**. Обозначается A^T (A').

Пусть дана матрица $A_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$, тогда

$A^T_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$

Пример: Вычислить матрицу: $\mathbf{D=A\cdot B^T - 2E + C^2}$ **,**

если $A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Решение:

1. Составим матрицу B^T, поменяв строки и столбцы матрицы B местами с сохранением нумерации $B^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Найдем произведение матриц $A\cdot B^T$

$$A\cdot B^T=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+(-3)\cdot 3+1\cdot(-2) & 2\cdot 0+(-3)\cdot 4+1\cdot 2 \\ 1\cdot 1+2\cdot 3+0\cdot(-2) & 1\cdot 0+2\cdot 4+0\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & -10 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Найдем произведение $2\cdot E = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Найдем матрицу $C^2= C\cdot C$

$$C^2=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+1\cdot(-1) & 2\cdot 1+1\cdot 3 \\ -1\cdot 2+3\cdot(-1) & -1\cdot 1+3\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Найдем матрицу $D=A\cdot B^T - 2E + C^2$, подставив найденные матрицы

$$D=\begin{pmatrix}-9 & -10\\ 7 & 8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9-2+3 & -10-0+5\\ 7-0-5 & 8-2+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -5\\ 2 & 14\end{pmatrix}$$

Ответ: $D=\begin{pmatrix}-8 & -5\\ 2 & 14\end{pmatrix}$

5.2.1.2. Миноры и алгебраические дополнения

Минором M_{ij} элемента a_{ij} квадратной матрицы n-ого порядка называется определитель n-1 порядка, полученного путем вычеркивания из исходного определителя i-ой строки и j-ого столбца.

Пример:

A= $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 0 & 9\end{pmatrix}$ $M_{13}=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 0\end{vmatrix}=-35$ $M_{22}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 7 & 9\end{vmatrix}=20$ $M_{32}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 6\end{vmatrix}=14$

Алгебраическим дополнением A_{ij}элемента a_{ij} квадратной матрицы n-ого порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij.}$

Например, если элемент a_{12} находится на пересечении первой строки и второго столбца, то для него р=1+2=3 и его алгебраическим дополнением является

$A_{12}=(—1)^3\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}= -(a_{21}\bullet a_{33}-a_{23}\bullet a_{31})$

Пример: A= $\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 0 & 9\end{pmatrix}$ $A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 0\end{vmatrix}=-35$ $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot M_{22}=1\cdot 20=20$

Теорема Лапласа: Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

$\Delta=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}=\sum_{i=1}^{n}a_{is}A_{is}$.

Например, разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки записывается так:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\bullet A_{11}+a_{12}\bullet A_{21}+a_{13}+A_{13}$$

Значение теоремы разложения состоит в том, что позволяет свести вычисление определителей n-го порядка к вычислению определителей (n-1)-го порядка.

Пример: Вычислить определитель: $\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}$

Решение:

Для вычисления данного определителя воспользуемся теоремой Лапласа: Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов, какой либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения. Для более удобного вычисления выполним элементарные преобразования: умножим элементы 1-ой строки на 1, (-2), (-1), и прибавляя их соответственно к элементам 2-ой, 3-ей, 4-ой строк, добиваемся того, чтобы все элементы 3-его столбца(кроме a_{13}) равнялись нулю и разложим определитель по элементам 3-его столбца:

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 3\cdot 2 + 6\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot 6 - 2\cdot 1\cdot 0 - (-1)\cdot(-1)\cdot 3 =$$

$$= 0 + 12 - 6 - 12 - 0 - 3 = -9$$

Для вычисления последнего определителя воспользовались правилом треугольника.

Ответ: определитель матрицы равен - 9.

5.2.1.3. Обратная матрица, способы ее нахождения

Обозначим через матрицу A матрицу системы (*), составленную из коэффициентов при неизвестных, через X – матрицу – столбец из неизвестных, через B – матрицу-столбец из свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица A^{-1} называется обратной для матрицы A, если $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и A, и матрица A называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю, т.е. $\Delta = |A| \neq 0$

Каждая невырожденная матрица A имеет обратную, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{11}, A_{12}, …A_{33} – алгебраические дополнения элементов матрицы A.

5.2.1.4. Метод Крамера

Для простоты рассмотрим систему из двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases}$$

$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ - это определитель матрицы коэффициентов A(det A) или его еще называют определителем системы и он составлен из коэффициентов при неизвестных. Обозначим его Δ.

2) $c_1a_{22} - c_2a_{12} = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}$ - - определитель, который получается из det A, **если в** нем столбец коэффициентов при X_1 (первый столбец) заменить на столбец свободных членов. Обозначим его Δx_1.

3) $c_2a_{11} - c_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$- определитель, который получится, если в det A столбец коэффициентов при x_2 заменить на столбец правых частей. Обозначим его Δx_2

Можно доказать, что $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta}$, $\quad a \quad$ $x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta}$

Если мы возьмем систему трех уравнений с тремя неизвестными, то формулы останутся те же:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta},\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta}$$

Эти формулы широко известны и называются **формулами Крамера.**

Формулы Крамера применяются для решения систем линейных уравнений, если определитель системы отличен от нуля (матрица коэффициентов является невырожденной)

Если же $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_1 или Δ_2 или Δ_3 не равен нулю, то система (1.2) решений не имеет.

Если же $\Delta = 0$ и $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система имеет бесчисленное множество решений.

Пример: Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5 \end{cases}$$

Вычислим определитель Δ системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot (-6) -$$

$$-6 \cdot 1 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot (-3) - 8 \cdot 1 \cdot (-1) = -24 - 12 - 6 + 24 + 9 + 8 = -1 \neq 0$$

Вычислим определители Δ_1, Δ_2, Δ_3:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 1 \cdot (-3) + 3 \cdot (-1) \cdot (-5) + 2 \cdot 1 \cdot (-6) -$$

$$-6 \cdot 1 \cdot (-5) - 3 \cdot 2 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-1) \cdot 1 = 12 + 15 - 12 - 30 + 18 - 4 = -1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & -3 \end{vmatrix} = 8\cdot 2\cdot(-3) + (-4)\cdot(-1)\cdot 4 + 1\cdot(-5)\cdot(-6) -$$

$$-6\cdot 2\cdot 4 - 8\cdot(-5)\cdot(-1) - (-4)\cdot 1\cdot(-3) = -48 + 16 + 30 + 48 - 40 - 12 = -6$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 8\cdot 1\cdot(-5) + 3\cdot 2\cdot 4 + (-4)\cdot 1\cdot 1 - (-4)\cdot 1\cdot 4 - 1\cdot 3\cdot(-5) - 8\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= -40 + 24 - 4 + 16 + 15 - 16 = -5$$

Таким образом,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{-1} = 6, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-1} = 5.$$

Ответ: (1,6,5)

5.2.1.5. Метод обратной матрицы

Обозначим через матрицу А матрицу системы (*), составленную из коэффициентов при неизвестных, через Х – матрицу – столбец из неизвестных, через В – матрицу-столбец из свободных членов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица A^{-1} называется обратной для матрицы А, если $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$, где Е – единичная матрица того же порядка, что и А, и матрица А называется невырожденной, если ее определитель не равен нулю, т.е. $\Delta = |A| \neq 0$

Каждая невырожденная матрица А имеет обратную, причем

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{11}, A_{12}, …A_{33} – алгебраические дополнения элементов матрицы А.

Систему (*) можно записать в матричной форме: $A\cdot X = B$.

Умножим слева на A^{-1} обе части этого равенства, получим:

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$.

Так как $A^{-1}\cdot A = E$, имеем $X = A^{-1}\cdot B$ – это решение системы в матричном виде. Следовательно, матрица – решение Х находится как произведение A^{-1} и В.

Пример: Решить систему методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 7x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Обозначим: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Тогда в матричной форме система имеет вид: A·X=B. Чтобы решить матричное уравнение, составим матрицу обратную матрице А.

Чтобы определить, имеет ли матрица А обратную нужно найти её определитель. Если$\Delta_{A,}\neq 0$, то матрица А имеет обратную матрицу A

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 21 - 8 - 28 - 15 - 4 = -44$$

Так как определитель матрицы А |А|≠0, то матрица А имеет обратную матрицу A^{-1}

Составим транспонированную матрицу: $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

Найдем алгебраические дополнения для Aijпо формуле: Aij=$(-1)^{i+j}$ • $M_{:/,}$ где $M_{ц}$ – минор. Минором $M_{ц}$ называется определитель матрицы, полученный путём вычёркивания i-строки и j-столбца.

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 2 = -7$$

$$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -(15 + 8) = -23$$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -(-5 + 7) = -2$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 28 = -38$$

$$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 - 4) = 6$$

$$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 7 = -9$$

$$A_{32} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 + 21) = -17$$

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5$$

Из алгебраических дополнений транспонированной матрицы составим присоединённую матрицу

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -7 & -23 & -1 \\ -2 & -38 & 6 \\ -9 & -17 & 5 \end{pmatrix}$ Находим обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \tilde{A}$

$A^{-1} = -\frac{1}{44} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -23 & -1 \\ -2 & -38 & 6 \\ -9 & -17 & 5 \end{pmatrix}$. Можно проверить правильность составления обратной матрицы A^{-1} • A= E: Теперь по формуле X=A^{-1}·B находим матрицу X

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{44} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -23 & -1 \\ -2 & -38 & 6 \\ -9 & -17 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{1}{44} \cdot (-7 \cdot 3 - 23 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{44} \cdot (-2 \cdot 3 - 38 \cdot 1 + 6 \cdot 0) = 1$$

$$x_3 = -\frac{1}{44} \cdot (-9 \cdot 3 - 17 \cdot 1 + 5 \cdot 0) = 1$$

Ответ: (1;1;1)

5.2.1.6 Кривые второго порядка, их канонические уравнения, свойства

1. Окружность

Кривые второго порядка - это линии на плоскости, координаты точек которых связаны уравнениями второй степени относительно x и ув декартовой системе координат. Рассмотрим следующие виды кривых второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружность - это совокупность точек на плоскости, равноудаленных от одной фиксированной точки (центра). Расстояние от точки, лежащей на окружности, до центра называется радиусом окружности.

Каноническое уравнение окружности имеет вид:
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad где \quad M(x_0, y_0)$ -центр окружности, R –радиус.

Пример: Построить линию, заданную уравнением $x^2 - x + y^2 - y = 0$.

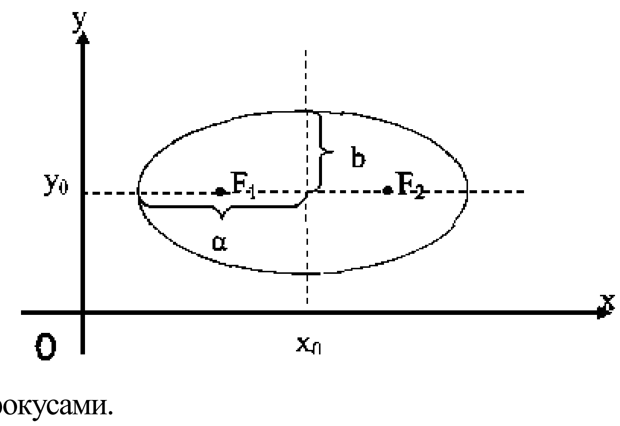
Решение: Приведем к стандартному виду. Для этого выделим полный квадрат разности для x и для y.

$$x^2 - 2x\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 2y\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Приведя уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, видим, что наша кривая есть окружность с центром в точке $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.



2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами.

Постоянную сумму расстояний произвольной точки эллипса до фокусов примято обозначать через 2a. Фокусы эллипса обозначают буквами $F_1 \; и \; F_2$, расстояние между ними - через 2c. По определению эллипса 2a >2c или a > c.

Данная фигура обладает двумя осями симметрии и центром симметрии.

Если фокусы (F_1 и F_2) расположенные на прямой, параллельной оси ОХ, то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$ - центр эллипса, a и b - большая и малая полуоси эллипса. Фокусы эллипса F_1 и F_2 расположены в точках, удаленных на расстоянии $c=\sqrt{a^2-b^2}$ от центра эллипса.

Отношение $\frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом эллипса и обозначается ε.

Пример: Определить вид кривой второго порядка

$$\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{2(y-3)^2}{36}=1$$

Решение:

$$\frac{(x+1)^2}{6^2}+\frac{(y-3)^2}{(3\sqrt{2})^2}=1$$

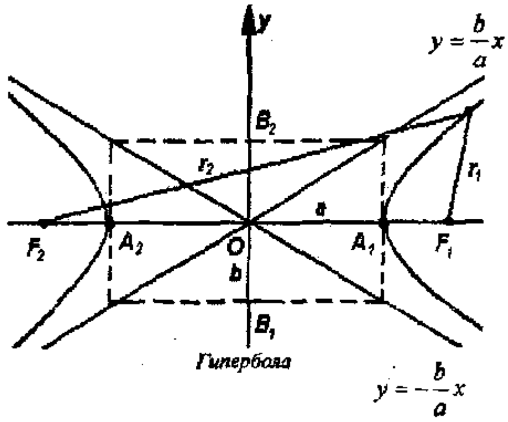
Наша линия есть эллипс с центром в точке А(-1,3), с большой полуосью a=6, малой полуосью $b=3\sqrt{2}$.

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-18}=3\sqrt{2}\approx 4{,}24$$

Фокусы:

$$F_1: x=-1-4{,}24=-5{,}24 \quad y=3$$

$$F_2: x=-1+4{,}24=3{,}24 \quad y=3$$



3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина; указанная разность берется по абсолютному значению и обозначается обычно через 2a. Фокусы гиперболы обозначают буквами F_1 и F_2 расстояние между ними - через 2c. По определению гиперболы 2a <2c или a < c.

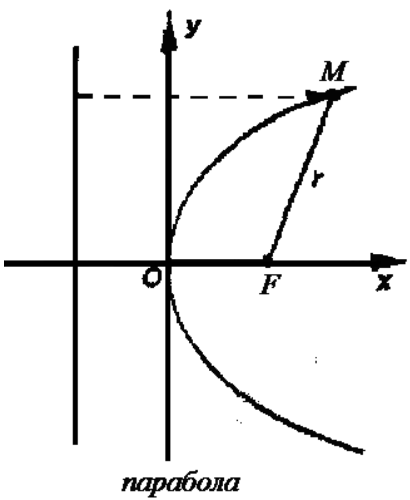
Данная фигура также обладает двумя осями симметрии и центром. Если фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ox, то ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Здесь точка $A(x_0;y_0)$ - центр гиперболы, a и b - действительная и мнимая полуось.

Прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы.

Пример: Эксцентриситет гиперболы равен $\sqrt{2}$. Составить простейшее уравнение гиперболы, проходящей через точку $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$.



Решение: Согласно определению эксцентриситета, имеем

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}, \ \text{или} \ c^2 = 2a^2.$$

Но $c^2 = a^2 + b^2$, следовательно, $a^2 + b^2 = 2a^2$, *или* $a^2 = b^2$, т.е. гипербола равнобочная.

Другое равенство получим из условия нахождения точки М на гиперболе, т.е.

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{b^2} = 1, \ \text{или} \ \frac{3}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1.$$

Поскольку $a^2 = b^2$, получим

$$\frac{3}{a^2} - \frac{2}{b^2} = 1, \ \text{т.е.} \ a^2 = 1$$

4. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Фокус параболы обозначается буквой F, расстояние от фокуса до директрисы - буквой p. Число p называется параметром параболы.

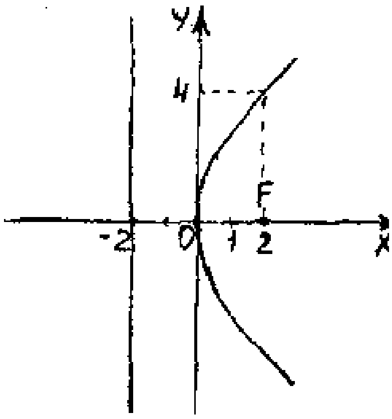
Фигура обладает осью симметрии. Если директриса параболы перпендикулярна Ox (Ox - ось симметрии), то уравнение параболы имеет вид:

$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$, где p - расстояние от фокуса до директрисы, точка (x_0; y_0) - вершина параболы.

Уравнение директрисы: $x = x_0 - \dfrac{p}{2}$.

Фокус в точке $F\left(x_0 + \dfrac{p}{2}; y_0\right)$.

Если Oy - ось симметрии, то уравнение параболы имеет вид: $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$. Уравнение директрисы: $y = y_0 - \dfrac{p}{2}$. Фокус в точке $F\left(x_0; y_0 + \dfrac{p}{2}\right)$.



Пример: Построить параболу y^2=8x. Найти фокус и уравнение директрисы.

Решение; Сравнивая данное уравнение с уравнением параболы видим, что OX -ось симметрии. Вершина параболы находится в начале координат.

2p=8 следовательно p=4, а значит фокус имеет координаты F(2; 0), уравнение директрисы - y= - 2.

5.2.2.1 Эквивалентные бесконечно малые в окрестности функции, их свойства, приложения

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, то функция *f(x)* называется **бесконечно малой** в окрестности точки x_0.

Например: функция $y=x-4$ при $x \to 4$ является бесконечно малой.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, то функция называется **бесконечно большой** в окрестности точки x_0.

Например: $y=x^3$ при $x\to\infty$ является бесконечно большой

Замечание: данные выше определения справедливы и при $x\to\pm\infty$.

Бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

1) алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых функций в окрестности некоторой точки есть функция бесконечно малая в окрестности той же точки;

2) произведение любого конечного числа бесконечно малых функций в окрестности некоторой точки есть функция, бесконечно малая в окрестности той же точки;

3) произведение бесконечно малой функции в окрестности некоторой точки на функцию ограниченную, есть функция, бесконечно малая в окрестности той же точки.

Бесконечно малые функции в окрестности некоторой точки x_0 $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **бесконечно малыми одного порядка малости,** если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0 .$$

Если c=0 то $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой функцией более высокого порядка малости** по сравнению с $\beta(x)$. Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными** в окрестности точки x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$. Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Примеры. 1) Бесконечно малые $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}$ *и* $\beta(x) = \frac{3}{5x^2}$ - являются бесконечно малыми одного порядка при $x\to\infty$, т.к. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1\cdot 5x^2}{x^2\cdot 3} = \frac{5}{3}c \neq 0$.

2) При $x\to\infty$ $a(x) = \frac{1}{x^5}$ является бесконечной малой более высокого порядка чем $\beta(x) = \frac{1}{x}$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1\cdot x}{x^5\cdot 1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4} = 0$.

3) При $x\to\infty$ $\alpha(x) = \frac{1}{x+5}$ *и* $\beta(x) = \frac{1}{x+18}$ являются эквивалентными бесконечно малыми, т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{1\cdot(x+18)}{(x+5)\cdot 1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+18}{x+5} = 1$.

Предел бесконечно малых (бесконечно больших) функций не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}, \text{если } f(x)\sim f_1(x),\ \varphi(x)\sim\varphi_1(x).$$

5.2.2.2 Правила Лопиталя

Мы уже знакомы с приемами нахождения пределов отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций, т.е. раскрытие неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и

$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Рассмотрим новые правила для раскрытия этих неопределенностей – **правила Лопиталя**.

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$) равен пределу отношения их производных $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\Psi(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\Psi'(x)}$, если предел правой части этого равенства существует.

Поясним на примерах.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{1}=5\lim_{x\to 0}\cos 5x=5$$

Если отношение производных опять представляет собой неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, то можно снова применить правило Лопиталя, т.е. перейти к отношению вторых производных и т.д.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$

Числитель и знаменатель дроби одновременно стремятся к нулю. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{16\sin 4x}{2}=8\lim_{x\to 0}\cos 4x=8$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}$

Числитель и знаменатель дроби представляют собой бесконечно большие функции при $x\to\infty$. Применяя два раза правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Кроме рассмотренных случаев неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ и $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, правила Лопиталя позволяют раскрывать неопределенности других видов.

Неопределенность вида (∞-∞). Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела (здесь и в дальнейшем под *c* следует понимать как число, так и бесконечность) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-\Psi(x)]$, когда *f(x)* и *Ψ(x)* являются бесконечно большими функциями одного знака, т.е. $\lim\limits_{x\to c}f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to c}\Psi(x)=\infty$. Этот случай преобразованием выражения *(f(x)- Ψ(x))* сводится к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 4. Найти $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$

Если $x\to 1$, то $\frac{1}{\ln x}\to\infty$ и $\frac{x}{\ln x}\to\infty$; следовательно, имеем неопределенность вида (∞-∞). Приведем дроби к общему знаменателю, тогда при $x\to 1$ числитель и знаменатель в последнем выражении одновременно стремятся к нулю. Таким образом, получаем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Применяя правило Лопиталя, найдем $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{1}{x}}=-1$.

Неопределенность вида (0·∞). Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim_{x\to c}[f(x)\Psi(x)]$, если $\lim_{x\to c}f(x)=0$ и $\lim_{x\to c}\Psi(x)=\infty$. Этот случай также преобразованием выражения *(f(x) Ψ(x))* сводится к раскрытию неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

Пример 5. Найти $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx$.

Так как $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\to 0$ и $tgx\to\infty$ при $x\to\frac{\pi}{2}$, то имеем неопределенность вида 0·∞. Преобразуем данное выражение так:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)tgx=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{ctgx}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-1$$

Неопределенность вида 1^∞. Под раскрытием такой неопределенности понимаем нахождение предела $\lim_{x\to c}[f(x)]^{\Psi(x)}$, если $\lim_{x\to c}f(x)=1$ и $\lim_{x\to c}\Psi(x)=\infty$.

Неопределенность вида 0^0. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim_{x\to c}[f(x)]^{\Psi(x)}$, если $\lim_{x\to c}f(x)=0$ и $\lim_{x\to c}\Psi(x)=0$.

Неопределенность вида ∞^0. Под раскрытием такой неопределенности понимают нахождение предела $\lim_{x\to c}[f(x)]^{\Psi(x)}$, если $\lim_{x\to c}f(x)=\infty$ и $\lim_{x\to c}\Psi(x)=0$.

Неопределенности вида 1^∞, 0^0, и ∞^0 приводятся к случаям неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ обычно с помощью логарифмирования $[f(x)]^{\Psi(x)}$ при условии, что *f(x)>0.*

Пример 6. Найти $\lim_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

В этом случае $(1+x^2)\to+\infty$, $\dfrac{1}{x}\to 0$, и мы имеем неопределенность вида ∞^0.

Обозначим $y=(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$, т.к. $(1+x^2)>0$, то логарифмируя, находим

$$ln\ y = ln(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}ln(1+x^2) = \frac{ln(1+x^2)}{x}$$

Так как при $x\to+\infty$ числитель и знаменатель стремятся к бесконечности, то получаем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty} ln\ y = \lim_{x\to+\infty}\frac{ln(1+x^2)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = 0$$

Так как $z=lny$ – функция непрерывная на D_z, то $\lim\limits_{x\to+\infty} ln\ y = ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} y\right)$;

следовательно, $ln\left(\lim\limits_{x\to+\infty} y\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y = e^0 = 1$. Итак $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1$.

5.2.2.2 Классификация точек разрыва

Определение: Функция называется непрерывной на некотором множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

1) $f(x)=x$. Эта функция непрерывна в любой точке на R (см. 17, пример 4).

2) $f(x)=\sin x$ непрерывна на R. Для доказательства достаточно показать, что для $\forall a\in R$ будет $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$. Воспользуемся определением Коши. Возьмем $\forall\varepsilon>0$. Тогда $|\sin x-\sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \le 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a|$

Достаточно взять $\delta\le\varepsilon$. Тогда

$|x-a|<\delta \quad (\le\varepsilon)\Rightarrow|\sin x-\sin a|<\varepsilon$

Аналогично можно доказать непрерывность косинуса.

Введем термины и обозначения.

Левый предел функции: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$.

Правый предел: $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$.

Теорема: Если в (.) x_0 существуют односторонние пределы, они равны между собой и равны A, то в точке x_0 существует предел функции, и он равен A.

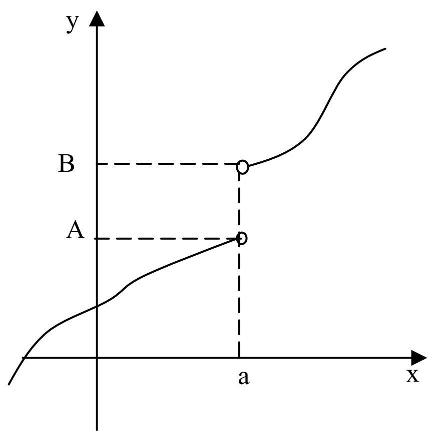


Рис. 9

Классификация точек разрыва функции

Определение: Пусть дана функция f с областью определения D_f. Тогда точка **a** называется **точкой разрыва** данной функции, если

1. $a\in\overline{D}_f$

2. Функция не является непрерывной в этой точке.

Проведем классификацию точек разрыва.

Определение: Если функция в точке разрыва имеет конечные односторонние пределы, то в этом случае разрыв функции называется разрывом **1-ого рода** или **скачком** (рис.9, 10).

В частности, скачком называется **устранимым** разрывом, если односторонние пределы равны между собой (рис.10). Разрыв этот называется устранимым потому, что функция в данной точке является почти непрерывной. Действительно, достаточно изменить или приписать функции в данной точке значение, равное односторонним пределам, как новая функция станет непрерывной.

Определение. Точка **a** называется точкой разрыва **2-ого рода**, если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или вообще не существует.

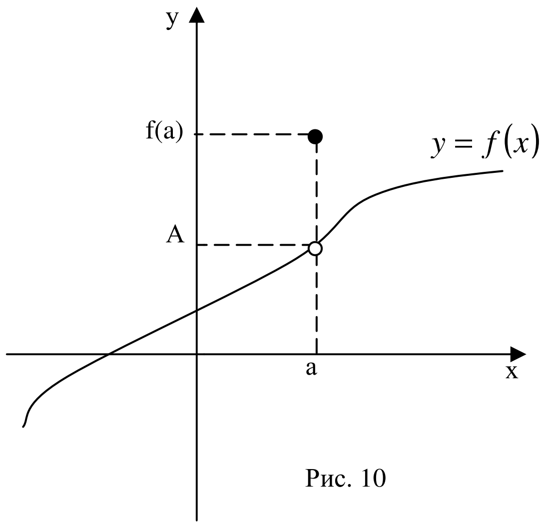


Рис. 10

5.2.3.1. Дифференцирование сложной функции. Дифференцирование обратной, неявной функции.

Пусть переменная *y* есть функция от переменной *u(y=f(u)),* а переменная *u* в свою очередь есть функция от независимой переменной *x: u=z(x)*. Тогда *y* называется функцией от функции или сложной функцией *y=f(z(x))*.

Производная сложной функции *y=f(z(x))* находится по правилу:

$$y' = f_z' \cdot z_x'.$$

Например: 1) $y = 3x^4 \quad y' = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$

2) $y = 3\sqrt[5]{x^3} + x - 1 \Rightarrow y = 5x^{\frac{3}{5}} + x - 1 \quad y' = 5 \cdot \frac{3}{5} x^{\frac{2}{5}} + 1 = 3x^{\frac{2}{5}} + 1 = \frac{3}{\sqrt[5]{x^2}} + 1$

3) $y = (x^2 - 5x + 8)^6 \quad z = x^2 - 5x + 8 \Rightarrow y = z^6$

$y' = 6z^5 z' = 6(x^2 - 5x + 8)^5 (x^2 - 5x + 8)' = 6(x^2 - 5x + 8)^5 (2x - 5)$

Пусть задана функция $y = f(x)$, что означает, что каждому числу x из некоторого множества поставлено в соответствие число y. Получаемые таким образом значения y также образуют некоторое множество. Можно поставить задачу в обратную сторону — по заданным значениям y найти соответствующие им значения x. И если каждому значению y ставится в соответствие только одно значение x, то говорят, что определена обратная функция, обозначаемая как $x = f^{-1}(y)$. Подчеркнем, что -1, находящаяся в степени, — это всего лишь обозначение для обратной функции, которое вовсе не сводится к дроби $\frac{1}{f(y)}$. Разумеется, можно использовать и любые другие символы для обозначения обратной функции, например $x = \varphi(y)$. Очевидно, что функция, обратная к обратной, дает исходную функцию, поэтому $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называют взаимно обратными функциями. Если функция $y = f(x)$ только возрастает или только убывает на некотором множестве значений x, то на соответствующем множестве значений y каждому значению y будет соответствовать только одно значение x, то есть будет определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$.*Пример 1.*Задана функция $y = 10x$. Область определения и область значений функции — вся числовая прямая. Обратная к ней функция будет $x = \frac{y}{10}$.*Пример 2.*Задана функция $y = x^2$. Область определения — вся числовая прямая, а область значений — только неотрицательные значения y . Очевидно, что одному и тому же положительному значению y будут соответствовать два различных (отличающихся знаком) значения x. Таким образом, мы можем определить две обратных функции, каждая из которых будет соответствовать той или иной ветви параболы $y = x^2$, то есть обратными будут функции $x = \pm\sqrt{y}$.

Теорема. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = \varphi(y)$ также имеет в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ производную, причем $\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Пример: Задана функция $y = x^2$. Используя теорему о производной обратной функции, вычислить $x'(y) = \left(\sqrt{y}\right)'$. Известно, что $y'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$. Используя только что доказанную теорему и подставляя обратную функцию $x(y) = \sqrt{y}$, получим $x'(y) = \left(\sqrt{y}\right)' = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.

Найти первую и вторую производные неявной функции и функции, заданной параметрически.

а) $y=e^y+4x$.

Продифференцируем обе части по x

$y'=e^y \cdot y'+4$; $y'(1-e^y)=4$; (*) Отсюда $y'=\frac{4}{1-e^y}$.

Дифференцируем равенство (*) по x

$y''\cdot(1-e^y)+y'\cdot(-e^y)\cdot y'=0$. Отсюда $y''=\frac{e^y\cdot(y')^2}{1-e^y}$ Подставляя вместо y' его выражение, получим $y''=\frac{16e^y}{(1-e^y)^3}$.

Ответ: $y'=\frac{4}{1-e^y}$. $y''=\frac{16e^y}{(1-e^y)^3}$.

5.2.3.2. Текстовые задачи на смысл производной

Пример. Число 36 записать в виде произведения двух положительных чисел, сумма которых наименьшая.

Решение. Пусть первый множитель равен x, тогда второй множитель равен $\frac{36}{x}$. Сумма этих чисел равна $x+\frac{36}{x}$. По условию задачи x – положительное число. Таким образом, задача свелась к нахождению такого значения x, при котором функция $f(x)=x+\frac{36}{x}$ принимает наименьшее значение на интервале $x>0$. Найдём производную:

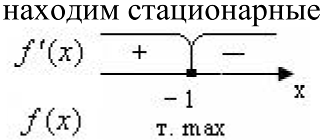
$$f'(x)=1-\frac{36}{x^2}=\frac{(x+6)(x-6)}{x^2}.$$

Стационарные точки $x_1=6$ и $x_2=-6$. На интервале $x>0$ есть только одна стационарная точка $x=6$. При переходе через точку $x=6$ производная меняет знак с “–” на “+”, и поэтому $x=6$ – точка локального минимума. Следовательно, наименьшее значение на интервале $x>0$ функция $f(x)=x+\frac{36}{x}$ принимает в точке $x=6$: $\min\limits_{x\in(0,+\infty)} f(x)=f(6)=12$.

Ответ. 36= 6·6.

Пример. Найти наибольшее (или наименьшее) значение функции $f(x)=\frac{2}{x}-x^2$ на интервале (–2; 0).

Решение. Производная $f'(x)=-\frac{2}{x^2}-2x$**;** причем она определена на интервале (–2; 0) и не имеет здесь критических точек. Чтобы найти стационарные точки, приравниваем производную к нулю: $\frac{2}{x^2}+2x=0$, т. е. $\frac{2+2x^3}{x^2}=0$. Решая уравнение $2+2x^3=0$, находим стационарные точки: $x=-1$. Определяем знак производной:



Так как $x=-1$ – это точка локального максимума, то $\max\limits_{x\in(-2;0)} f(x)=f(-1)=-3$.

Ответ. $\max\limits_{x\in(-2;0)} f(x)=f(-1)=-3$.

5.2.3.3. Интегрирование рациональных выражений.

Рассмотрим дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$- многочлен *n*-ой степени от *x*, $Q_m(x)$- многочлен *m*-ой степени от *x*. Возможны случаи:

1. n≥m. В этом случае рассматриваемая дробь называется неправильной.

Разделив числитель на знаменатель, выделим целую часть дроби (многочлен степени *n-m*):

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=R_{n-m}(x)+\frac{P^*{}_k(x)}{Q_m(x)},\ \text{где}\ \boldsymbol{k<m} \Rightarrow \frac{P^*{}_k(x)}{Q_m(x)}\ \text{- правильная дробь.}$$

2. ***n<m***. В этом случае имеем правильную дробь. Остановимся сначала на интегрировании «простых» дробей, их четыре типа.

I. $\dfrac{A}{x-a}$; II. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k=2,3,\ldots$;

III. $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m}$, $m=2,3,\ldots$.

При этом x^2+px+q не имеет действительных корней, т.е. $D=p^2$-$4q<0$.

I. $\int \dfrac{A}{x-a}dx = A\int \dfrac{dx}{x-a} = \left|d(x-a)=1\cdot dx\right| = A\int \dfrac{d(x-a)}{x-a} =$ (формула 3 ТОИ)= $= A\,ln\left|x-a\right| + C.$

II. $\int \dfrac{A}{(x-a)^k}dx = A\int \dfrac{dx}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}\cdot d(x-a) =$ (формула 2 ТОИ) = $= A\dfrac{(x-a)^{k+1}}{-k+1} + C = \dfrac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$

III. Для интегрирования дробей третьего типа поступаем следующим образом (покажем на примере).

$\boldsymbol{J}= \int \dfrac{3x+1}{x^2+4x+9}dx$

а) находим производную от знаменателя: $(x^2+4x+9)' = 2x+4$ и числитель представляем следующим образом:

$$3x+1 = \frac{3}{2}\cdot 2x+1 = \frac{3}{2}(2x+4-4)+1 = \frac{3}{2}(2x+4)-6+1 = \frac{3}{2}(2x+4)-5.$$

$\boldsymbol{J}= \int \dfrac{\frac{3}{2}(2x+4)-5}{x^2+4x+9}dx =$ (по свойству 3 получаем)=

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+9} - 5\int \frac{dx}{x^2+4x+9} = \frac{3}{2}J_1 - 5J_2.$$

В первом интеграле делаем подстановку

$t = x^2+4x+9 \Rightarrow dt = (2x+4)dx,$ которая приводит его к виду:

$\dfrac{3}{2}\int \dfrac{dt}{t} = \dfrac{3}{2}ln\left|t\right| + C =$ (формула 3 ТОИ) = $\dfrac{3}{2}ln\left|x^2+4x+9\right| + C.$

Во втором интеграле выделяем полный квадрат в знаменателе дроби: $x^2+4x+9 = x^2+2\cdot 2x+2^2-2^2+9 = (x+2)^2+5$ и делаем подстановку $t=x+2 \Rightarrow$ $dt=dx$. Получаем:

$\int \dfrac{dx}{x^2+4x+9} = \int \dfrac{dx}{(x+2)^2+5} = \begin{vmatrix} t = x+2 \\ dt = dx \end{vmatrix} = \int \dfrac{dt}{t^2+5} =$ (формула 13 ТОИ)=

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{1}{\sqrt{5}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

Окончательный результат: $\boldsymbol{J}= \dfrac{3}{2}ln(x^2+4x+9) - \sqrt{5}arctg\dfrac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$

IV. Дроби четвертого типа интегрируются в той же последовательности, что и дроби третьего типа, кроме того, применяется рекуррентная формула:

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}J_n, \text{ где } J_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}.$$

Зная, что $J_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C,$ находим:

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C\right) = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a} + C.$$

По этой же формуле при n=2 находим:

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}\left(\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}arctg\frac{x}{a} + C\right) =$$

$$= \frac{1}{4a^2}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4}\cdot\frac{x}{x^2+a^2} + + \frac{3}{8a^5}arctg\frac{x}{a} + C$$ и т.д.

Таким образом, можно вычислить $\boldsymbol{J_n}$ для любого натурального n.

Примеры:

1.$\boldsymbol{J}$= $\int \frac{(2x-1)dx}{(x^2+6x+10)^2} = \int \frac{(2x+6)-7}{(x^2+6x+10)^2}dx = \int \frac{(2x+6)dx}{(x^2+6x+10)^2} - 7\int \frac{dx}{(x^2+6x+10)^2};$

а) $(x^2+6x+10)' = 2\tilde{o}+6$;

б) числитель $2x-1=2x+6-6-1=(2x+6)-7$;

в) в знаменателе $x^2+6x+10 = x^2+6x+9+1 = (x+3)^2+1.$ Тогда

$$J = \int \frac{dt}{t^2} - 7\int \frac{dx}{((x+3)^2+1)^2} = \begin{vmatrix} x+3=z \\ dz=dx \end{vmatrix} = \int t^{-2}dt - 7\int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{t^{-1}}{-1} - 7J_2 = -$$

$$-7\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z^2+1} + \frac{1}{2}arctgz\right) + C = -\frac{7}{2}\cdot\frac{x+3\cdot\frac{2}{7}}{x^2+6x+10} - \frac{7}{2}arctg(x+3) + C.$$

Чтобы проверить полученный результат, надо найти производную от последнего выражения и с помощью преобразований привести ответ к виду $\frac{2x-1}{(x^2+6x+10)^2}$ (предлагаем студентам выполнить эту работу самостоятельно).

2. Пусть теперь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная дробь. Не теряя общности, можно считать, что старший коэффициент $Q(x)$ равен 1 (иначе его можно вынести за скобки и за знак интеграла).

Тогда $Q(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot (x-b)^l (x^2+px+q)^m \cdot \ldots \cdot (x^2+rx+s)^n,$ (11)

где $a, b, \ldots$ - действительные корни многочлена, а квадратные трехчлены не имеют действительных корней.

Справедлива теорема о представлении правильной дроби в виде суммы простейших дробей.

Теорема: Если знаменатель дроби Q(x) имеет разложение (11), то дробь представима в виде суммы простых дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^k} + \frac{A_2}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_k}{x-a_i} + \ldots + \frac{B_1}{(x-b)^l} + \frac{B_2}{(x-b)^{l-1}} + \ldots + \frac{B_l}{x-b} + \ldots$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^m} + \ldots + \frac{M_mx+N_m}{x^2+px+q} + \frac{E_1x+F_1}{(x^2+rx+s)^n} + \ldots + \frac{E_nx+F_n}{x^2+rx+s},$$

где $A_1, A_2, \ldots E_1, \ldots F_n$ - некоторые коэффициенты.

Поясним применение теоремы на **примере**.

Пусть $Q(x)=(x-1)^3(x+2)(x^2+4)^2$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{B_1}{x+2}+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+4)^2}+\frac{C_2x+D_2}{x^2+4}.$$

Итак, линейный множитель $(x-1)^3$ порождает три простых дроби, $(x+2)$ – одну, $(x^2+4)^2$ – две дроби.

Рассмотрим различные способы нахождения коэффициентов разложения *A, B, C,*

Примеры:

1.

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3}=\frac{A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+1)(x-3)}.$$

Если равные дроби имеют одинаковые знаменатели, то и числители их одинаковы, т.е.

$2x+1=A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+1)$ (**)

Положим x=1, тогда $2\cdot 1+1=A\cdot 2(-2)+B\cdot 0+C\cdot 0$

x=-1, тогда $2\cdot(-1)+1=A\cdot 0+B(-2)(-4)+C\cdot 0$

x=3, тогда $2\cdot 3+1=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 2\cdot 4$

Отсюда $A=-\frac{4}{3}; B=-\frac{1}{8}; C=\frac{7}{8}$.

Следовательно, $\frac{2x+1}{(x-1)(x+1)(x-3)}=\frac{-\frac{4}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{8}}{x+1}+\frac{\frac{7}{8}}{x-3}$.

Второй способ нахождения *A,B,C* состоит в сравнении коэффициентов при одинаковых степенях *«x»* в левой и правой частях равенства *(**)*.

5.2.3.4. Метод введения под знак дифференциала

$$\int\frac{x^2}{1+x^3}dx$$

Решение:

Применим замену переменной.

$$\int\frac{x^2}{1+x^3}dx=\left|\begin{array}{l}1+x^3=t\\ 3x^2dx=dt\\ x^2dx=\frac{1}{3}dt\end{array}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{3}\ln|t|+C=\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C.$$

Ответ: $\int\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C.$

5.2.3.5. Основная теорема математического анализа.

До сих пор мы рассматривали определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования *a* и *b*. Пусть функция *f*(*x*) интегрируема на отрезке [*a, b*]. Если $x\in[a,b]$, то функция *f*(*x*) также интегрируема на любом отрезке [*a, x*]. Если изменять верхний предел, не выходя из отрезка [*a, b*], то величина интеграла будет изменяться, т. е. интеграл

$$\int_a^x f(t)dt$$

с постоянным нижним пределом *a* и переменным верхним пределом *x* есть функция верхнего предела. Обозначим эту функцию $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \tag{1}$$

Замечание. Для удобства переменная интегрирования здесь обозначена буквой *t*, так как буквой *x* обозначен верхний предел интегрирования. Интеграл (1) называется ***интегралом с переменным верхним пределом.***

Сформулируем основную теорему дифференциального и интегрального исчисления, устанавливающую связь между производной и интегралом.

Теорема. Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т. е.

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x) \tag{2}$$

Эта теорема утверждает, что любая непрерывная функция на отрезке $[a, b]$ имеет на нем первообразную, причем этой первообразной является функция $\Phi(x)$, а так как всякая другая первообразная функции $f(x)$ может отличаться от данной $\Phi(x)$ лишь на постоянную, то устанавливается связь между неопределенным и определенным интегралом

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$$

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{3}$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$.

Формула (3) называется ***формулой Ньютона – Лейбница.*** Формулу Ньютона – Лейбница можно переписать как

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$ где $$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Вывод. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$ равен разности значений любой первообразной для верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Формула Ньютона – Лейбница открывает широкие возможности для вычисления определенных интегралов, так как задача сводится к задаче вычисления неопределенных интегралов.

Если считать переменным нижний предел интегрирования, то пользуясь формулой Ньютона – Лейбница, получим

$$\left(\int_x^b f(t)dt\right)'_x = -f(x) \tag{4}$$

Теорема. Если *f(x)* – непрерывная, *φ(x), ψ(x)* – дифференцируемые функции, то производная от интеграла $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x)dx$ по переменной *x*

$$\left(\int\limits_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt\right)'_x = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x). \qquad (5)$$

П р и м е р. Найти производную по *x* от интеграла $F(x) = \int\limits_{\ln x}^{x^2} e^{t^2}dt$.

Решение.

Здесь $f(t) = e^{t^2};\ \varphi(x) = x^2;\ \psi(x) = \ln x;\ f(\varphi(x)) = e^{x^4};\ f(\psi(x)) = e^{\ln^2 x} = e^{\ln x \ln x} = x^{\ln x}$,

$\varphi'(x) = 2x$, $\psi'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Пользуясь формулой (5), получим

$$\left(\int\limits_{\ln x}^{x^2} e^{t^2}dt\right)'_x = e^{x^4}2x - x^{\ln x}\frac{1}{x} = \frac{2x^2e^{x^4} - x^{\ln x}}{x}.$$

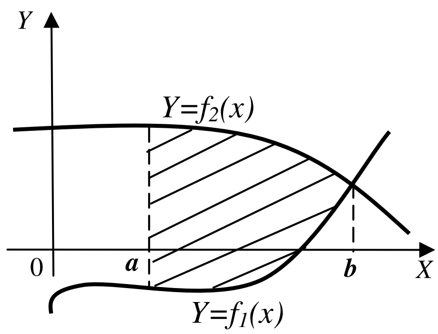
5.2.3.7. Квадрируемые фигуры и кубируемые тела. Вычисление объема тел вращения.

1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах

Формулы для нахождения площади плоской фигуры:

в декартовой системе координат (рис.5) $S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx;$ (18)

в полярной системе координат (рис.6) $S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta (r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi))d\varphi;$ (19)



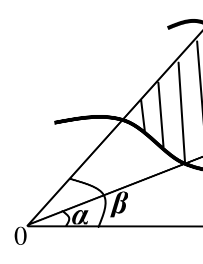
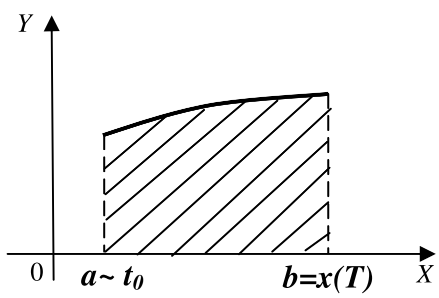


Рис. 5.



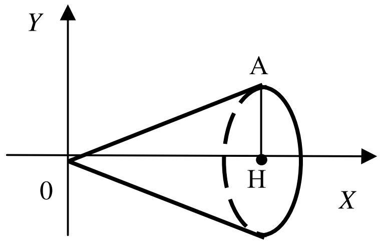
в случае параметрического задания кривой

$$S = \int\limits_{t_0}^{T} y(t)x'(t)dt. \qquad (20)$$

2. Вычисление объема тела с известным поперечным сечением, задача о нахождении объема тела вращения.

Пусть T – тело, полученное вращением криволинейной трапеции вокруг OX, тогда **объем тела** $\boldsymbol{T}$ определяется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \qquad (24).$$



Пример. Найти объем прямого кругового конуса (радиус основания -R, высота- H), полученного вращением треугольника OAH вокруг оси OX.

Решение: уравнение OA: $Y = \dfrac{R}{H}x$, следовательно

$$V = \pi \int_0^H \frac{R^2 x^2}{H^2} dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H\,(\text{ед.}^3\,).$$

Замечание: Если кривая *f(x)* задана параметрически или в полярной системе координат, то в определенном интеграле надо сделать замену переменных. При этом не следует забывать про **новые пределы интегрирования.**

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями.

$y=x^2-4$ и $y=4-x^2$.

Решение:

Обе линии являются параболами.

Вершина первой параболы находится в точке (0; -4). Ветви направлены вверх.

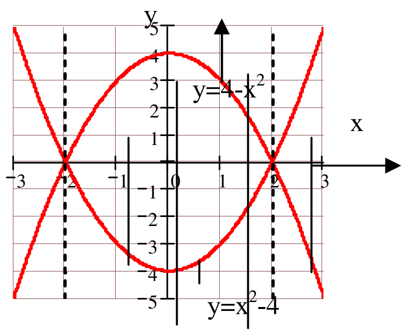
Вершина второй параболы находится в точке (0; 4). Ветви направлены вниз.

Найдем точки пересечения этих линий.

$$\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 4 - x^2 \end{cases} \qquad x^2 - 4 = 4 - x^2, \quad 2x^2 = 8, \quad x^2 = 4,$$

$$x_{1,2} = \pm 2, \; x_1 = -2, \; x_2 = 2, \; y_1 = 0, \; y_2 = 0.$$

Сделаем чертеж:



Площадь найдем по формуле $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$

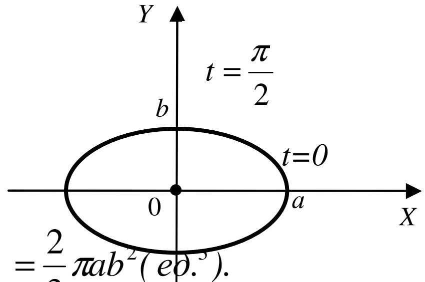
$$S = \int_{-2}^{2} [(4 - x^2) - (x^2 - 4)]dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx = \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(16 - \frac{16}{3}\right) - \left(-16 + \frac{16}{3}\right) = \frac{64}{3}\text{(кв.ед.)}.$$

Ответ: Искомая площадь 64/3 (кв. ед.).

Пример. Найти объем эллипсоида, полученного вращением эллипса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ вокруг оси OX

$$\frac{V}{2} = \pi \int_{0}^{a} y^2 dx = \left| \begin{matrix} y = b\sin t \\ dx = -a\sin t dt \\ \alpha = \frac{\pi}{2}; \beta = 0 \end{matrix} \right| = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2 \sin^2 t(-a\sin t)dt =$$



$$= \pi ab^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \cos^2 t)d(\cos t) = \pi ab^2 \left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_{\pi/2}^{0} = \frac{2}{3}\pi ab^2 (ед.^3).$$

3.МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ПОДГОТОВКЕ К ЗАНЯТИЯМ

3.1 Практическое занятие 1 (ПЗ-1) Элементы теории матиц и определителей. Элементы линейной алгебры. Элементы аналитической геометрии.

При подготовке к занятию необходимо обратить внимание на:

- классификацию матриц; условия осуществления операций над матрицами;
- алгоритм перемножения матриц;
- свойства определителей; алгоритмы вычисления определителей третьего порядка; применение теоремы Муавра-Лапласа4
- классификацию СЛУ по количеству решений;
- алгоритм применения метода Гаусса;
- различные подходы к определению понятия вектора, классификацию векторов;
- алгоритмы выполнения операций над векторами в координатной форме;
- признак коллинеарности и ортогональности векторов, их свойства;
- основные способы задания прямой на плоскости;
- активизацию геометрических знаний школьного курса;
- формулы для вычисления расстояния между точками, расстояния между точкой и прямой;

3.2 Практическое занятие 2 (ПЗ-2) Теория пределов и непрерывность функции в точке. Производная функции в точке, ее геометрический смысл.

- причину введения понятия предела функции в точке, свойства функций, имеющих предел в точке;
- алгоритмы вычисления предела функции в точках и на бесконечности, раскрытие неопределенностей.
- определения функции, непрерывной в точке, понятие односторонних пределов, признак существования предела, алгоритм исследования функции на непрерывность и классификацию точек разрыва;
- геометрический и физический смысл производной, уравнение касательной и нормали к кривой; правила дифференцирования;
- необходимое, достаточное условие существования экстремума, теорему о монотонности дифференцируемой функции;
- необходимое, достаточное условие существования точки перегиба, теорему об исследовании формы кривой;
- классификацию асимптот, достаточный признак наклонной асимптоты, признак вертикальной асимптоты.

3.3 Практическое занятие 3 (ПЗ-3) Первообразная и неопределенный интеграл. Нахождение неопределённого интеграла

- свойства неопределенного интеграла;
- метод непосредственного интегрирования;
- метод интегрирования подстановкой;
- метод интегрирования «по частям».

3.4 Практическое занятие 4 (ПЗ-4) Определенный интеграл, его свойства, методы вычисления, приложения

- условия применения формулы Ньютона-Лейбница;
- основные методы вычисления определенного интеграла;
- геометрический смысл определенного интеграла;